Über die Genauigkeit der Längen- und Winkelmessungen in Städten.

Auf Grund amtlichen Materials der freien Hansestadt Bremen.

Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde der philosophischen Fakultät der Universität Rostock vorgelegt von

ADOLF KOPSEL

gepr. Vermessungs- und Kultur-Ingenieur.

Rostock ◦ 1904 ◦ Universitäts-Buchdruckerei von Adlers Erben, G. m. b. H.

Referent: Professor Dr. **Staude.**

Meiner lieben Frau Johanna gewidmet.

Vorwort.

1. Durch Gesetz vom 26. Februar 1888 haben die Gesetzgebenden Behörden der Freien Hansestadt Bremen die Neuvermessung der Alt- und Neustadt Bremen beschlossen. Ein Bedürfnis für diese Vermessung lag zwar schon längst vor; es fehlte aber bis dahin eine genaue Haupttriangulierung, welche als Grundlage für die Stadtvermessung hätte dienen können. Damals war nun die seitens des Preussischen Generalstabes ausgeführte Haupttriangulierung (das Wesernetz) soweit fertig, dass für eine Reihe von Hauptpunkten, welche in weitem Bogen das Bremische Gebiet umspannen, die endgültigen Koordinaten vorlagen. Alle weiteren Triangulierungen sind von Bremischer Seite selbständig ausgeführt, und es ist mit Rücksicht auf den besonderen Zweck dieser Arbeiten — die Vermessung einer Grossstadt — mehr Zeit und Mühe auf die Winkelmessungen verwendet worden, als der Preussische Generalstab anzuwenden Veranlassung gehabt hätte.

In das gegebene Netz ist nacheinander ein Dreiecksnetz II., III., IV. und V. Ordnung eingefügt worden. Die erreichte Genauigkeit ist im Mittel und in runden Zahlen die folgende:

Netz II. Ordnung:

Mittlerer Fehler einer Richtung rund	± 1 ".
Mittlerer Fehler der Koordinaten im Mittel	± 3 cm.
Mittlerer Fehler eines Punktes $(3\sqrt{2})$	± 4 cm.
Mittlerer Fehler einer Seite (11 km)	± 6 cm
	oder $^1/_2$ cm pro km.

Netz III. Ordnung:

Mittlerer Fehler einer Richtung rund	± 2 ".
Mittlerer Fehler der Koordinaten gegen	± 2 cm.
Mittlerer Fehler eines Punktes	± 2½ cm.
Mittlerer Fehler einer Seite (3,5 km)	± 3½ cm
	oder 1 cm pro km.

Netz IV. Ordnung:

Mittlerer Fehler einer Richtung rund	± 4".
Mittlerer Fehler der Koordinaten	± 1½ cm.
Mittlerer Fehler eines Punktes	± 2,3 cm.
Mittlerer Fehler einer Seite (1½ km)	± 3 cm
	oder 2 cm pro km.

Für das

Netz V. Ordnung

liegen keine Genauigkeitsnachweise vor. Nach Vorstehendem werden die Fehler aber nicht weniger betragen als:

Mittlerer Fehler einer Richtung	± 6".
Mittlerer Fehler der Koordinaten	± 1 cm.
Mittlerer Fehler eines Punktes	± 1½ cm.
Mittlerer Fehler einer Seite (0,5 bis 0,7 km)	± 2 cm
	oder 3 bis 4 cm pro km.

An die Punkte V. Ordnung schliesst sich das Hauptpolygonnetz. Den Hauptstrassenzügen folgend, verbindet man zwei passend gelegene trigonometrische Punkte durch einen gebrochenen Linienzug, der durch Messung aller Seiten und aller Winkel aufgenommen wird. Während die trigonometrischen Punkte bisher durch reine Winkelmessung bestimmt sind, tritt hier ein neues Element hinzu, die Längenmessung. Übrigens hat nur der weitaus kleinste Teil des Bremischen Polygonnetzes direkten Anschluss an trigonometrische Punkte erhalten können; die meisten Polygonzüge liegen zwischen bereits bestimmten Polygonzügen.

An und zwischen diese Hauptpolygonzüge schliessen sich jetzt noch eine grosse Menge von Nebenzügen, welche

ebenso, durch Winkel- und Seitenmessung, aufgenommen werden. An den Seiten dieser Nebenzüge, bezw. an Verbindungslinien zwischen ihnen, geschieht erst die Einzelaufnahme der Grundstücke.

Bei der Berechnung gilt jedesmal die gegebene höhere Gruppe als fehlerfrei; die auftretenden Widersprüche werden demgemäss durch alleinige Änderung der neu zu berechnenden Grössen beseitigt, so dass z. B. die Fehler der trigonometrischen Punkte V. Ordnung in Wirklichkeit die Summe aller Fehler der Punkte von der I. bis zur V. Ordnung darstellen.

2. **Fehlerformeln für Längenmessungen.** Mit der Aufnahme der Polygonzüge tritt die ganze Arbeit in ein neues Stadium. Solange man mit trigonometrischen Punkten allein, also mit reiner Winkelmessung, zu tun hat, wird die ganze Berechnung nach den festen Regeln der Methode der kleinsten Quadrate durchgeführt, und die mittleren Fehler geben ein untrügliches Merkmal für die erreichte Genauigkeit ab. Jetzt müssen aber zunächst andere und weitere Arbeitskräfte herangezogen werden, und schon der Einheitlichkeit wegen, besonders aber um von vornherein unbrauchbare Arbeiten auszuschliessen, ist festzusetzen, welche Abweichungen und Fehler noch als zulässig geduldet werden sollen. — Die Länge einer Polygonseite wird hergebrachtermassen durch eine Doppelmessung bestimmt, und es handelt sich also zunächst darum, zu bestimmen, welche Abweichung zwischen Hin- und Rückmessung noch statthaft sein soll. Abgesehen davon, dass bei längeren Seiten grössere Abweichungen erlaubt sind, als bei kürzeren, weichen in den einzelnen Deutschen Bundesstaaten die Bestimmungen auf das Merkwürdigste von einander ab.

In einigen Staaten (Sachsen, Mecklenburg, früher Preussen) sollen die Fehler der Längenmessung einen bestimmten Prozentsatz der Länge nicht überschreiten (meist $^1/_{1000}$). Wer

nach diesen Bestimmungen Längenmessungen auszuführen hat, merkt sofort, dass es zwar sehr leicht ist, bei nur einigermassen günstigen Verhältnissen eine Linie von 1000 m richtig, also mit höchstens 1 m Abweichung, hin und zurück zu messen, dass es aber sehr schwer ist, bei 10 m Länge die Fehlergrenze von 1 cm nicht zu überschreiten.

In einigen anderen Staaten trägt man dieser Schwierigkeit dadurch Rechnung, dass man zu der von der Länge abhängigen Differenz einen festen Betrag hinzuzählt. So hat man in Hessen die Formel $0{,}06 + 0{,}0004\,L$, in Elsass-Lothringen das Doppelte $0{,}12 + 0{,}0008\,L$.

In den Lehrbüchern der Feldmesskunst war dagegen seit langer Zeit darauf hingewiesen, dass die Fehler mit der Quadratwurzel der Länge zunehmen müssten. Eine „Amtliche" Anerkennung hat dies Quadratwurzelgesetz in Deutschland aber bisher nirgends gefunden.

Dagegen bestimmt die neueste Preussische Vermessungs-Anweisung (Anweisung IX von 1881) in § 33, dass die Abweichung zweier Messungen derselben Länge L in günstigem Gelände höchstens

$$a = 0{,}01\sqrt{4\,L + 0{,}005\,L^2}$$

betragen darf. Ein ähnlicher Ausdruck wird auch in Bayern angewendet. — Folgende Abweichungen (in cm) sind in den verschiedenen Staaten zulässig (unter günstigen Verhältnissen)

Länge	10 m	50 m	100 m	200 m	400 m
		Zulässige Abweichungen:			
Bayern	?	13 cm	20 cm	33 cm	56 cm
Elsass	?	16 „	20 „	28 „	44 „
Hessen	3 cm	6 „	10 „	14 „	22 „
Sachsen, Mecklenburg	1 „	5 „	10 „	20 „	40 „
Preussen	6 „	14 „	21 „	32 „	49 „
Württemberg	4 „	10 „	15 „	24 „	40 „
Quadratwurzelgesetz	6 „	14 „	20 „	28 „	40 „

Zum Vergleich sind noch die Beträge beigefügt, welche sich aus dem Quadratwurzelgesetz ergeben, wenn man für L = 400 m eine Abweichung von 40 cm zulässt.

Diese Fehlergrenzen beziehen sich auf „günstige Verhältnisse"; in den meisten Fällen hat man noch eine oder zwei andere für weniger günstiges und ganz schwieriges Gelände aufgestellt, die hier aber weiter nicht in Betracht kommen. Sogar die „günstigen Verhältnisse" treffen bei einer Grossstadt nicht zu; man überzeugt sich schon durch wenige Versuchsmessungen, dass es auf den glatten Klinkern des Bürgersteiges leicht ist, eine Linie von 100 m mit Sicherheit auf 2 cm richtig zu messen. Zu der Frage der Formel kommt also noch die Frage der Koeffizienten. Mit der Preussischen Anweisung IX, welche man in Bremen ebenfalls eingeführt hat, hat man auch die neuen Preussischen Formeln für die Längenabweichung angenommen, letztere aber auf ein Achtel, bezw. ein Viertel heruntergesetzt. Es gelten nämlich die Doppelmessungen der Seiten der Hauptzüge noch als richtig, wenn sie nicht mehr als

$$a = 0{,}00125 \sqrt{4\,L + 0{,}005\,L^2},$$

die der Seiten der Nebenzüge noch als richtig, wenn sie nicht mehr als

$$a = 0{,}0025 \sqrt{4\,L + 0{,}005\,L^2}$$

von einander abweichen.

Jetzt, nach Beendigung der Vermessungsarbeiten, entsteht nun die wichtige Frage: Haben die Abweichungen obiger Formel entsprochen, und sind die Konstanten der Formel zutreffend? Die Beantwortung dieser Frage ist wichtig für weitere Vermessungsarbeiten, und ist mindestens nützlich für Städte mit ähnlichen Verhältnissen wie Bremen. Die Fachliteratur zeigt in diesem Punkt eine bedauerliche Lücke, weil die Vermessungen der Grossstädte erst in den letzten Jahren allgemeiner geworden sind. Wo Genauigkeits-

nachweise gegeben sind, ist das Quadratwurzelgesetz angewendet worden, ohne dass nachgewiesen ist, dass es überhaupt zutreffend ist. Wenn etwa zwei Städte nach dem Quadratwurzelgesetz gleiche Genauigkeit erzielt haben, die mittlere Länge der Polygonseiten aber bei der einen die Hälfte von der der andern beträgt, so ist man durchaus berechtigt zu bezweifeln, dass die Genauigkeit wirklich in beiden Fällen dieselbe ist.

I. Die Genauigkeit der Längenmessungen.

3. **Das Beobachtungsmaterial.** Zunächst haben wir die Seiten der Hauptpolygonzüge. Diese Seiten sind mit hölzernen, 5 Meter langen Latten doppelt, hin und zurück gemessen. Weitere Messungen, als die der Seitenlänge, haben gleichzeitig nicht stattgefunden; der betreffende Beamte konnte also seine volle Aufmerksamkeit der Längenmessung zuwenden. Die erste Hälfte dieser Messungen — in der Neustadt — ist in der Art ausgeführt, dass die Latten nicht direkt an einander gelegt sind, und dass die Zwischenräume mittelst eines Messkeils besonders gemessen sind. Die zweite Hälfte ist in der üblichen einfachen Weise gemessen; die erzielten Resultate sind mindestens ebenso gut.

Die Endpunkte der Linien sind durch Kreuze bezeichnet, welche in das Trottoir eingemeisselt sind, oder auch durch Gasrohre von etwa 25—30 cm Länge und 1 cm lichter Weite, welche in die Fugen des Pflasters eingetrieben sind; in einzelnen Fällen — in der Fahrbahn der Strasse — durch eiserne Kasten von der Grösse eines grossen Kopfsteins, welche ein Rohr oder einen eisernen Pfahl enthalten. Zuerst hat man auch die eisernen Deckel der Kanalschächte und ähnliche gegebene Festpunkte benutzt; dies hat sich aber

nicht bewährt. Die Linien sind meistens in die Mitte der Strassen gelegt. Obwohl die Neustadt lange, grade Strassen hat, so sind doch keine Polygonseiten über 200 Meter Länge angelegt worden.

Beim Messen wurden die Linien sorgfältig ausgerichtet und durch einen Kreidestrich auf dem Pflaster bezeichnet; Fehler durch seitliches Ausweichen aus der Linie sind also so gut wie ausgeschlossen. Da die Stadt Bremen fast vollständig horizontal liegt, so sind auch nach dieser Hinsicht keine besonderen Fehler zu befürchten; im übrigen sind die Höhenunterschiede durch Einwägen festgestellt und berücksichtigt, wo sie nur irgendwelchen Einfluss auf die Länge hätten haben können.

Von diesen Hauptpolygonseiten liegen vor rund 700 Stück.

An die Hauptzüge, welche in mehreren Abstufungen vorhanden sind, schliessen sich die Nebenzüge. Wo die Seiten der Hauptzüge auf der Fahrbahn der Strasse liegen, laufen jene auf den beiden Trottoirs; sonst folgen sie den Nebenstrassen oder sie gehen über die Hofplätze der Grundstücke, teilweise durch die Häuser, häufig durch die Fenster, über Planken und über Mauern. Die meisten Seiten sind unter schwierigen Verhältnissen gemessen. Mit der einen Messung ist in der Regel eine Aufnahme der Gebäude und der Grundstücksgrenzen verbunden worden. Zur Messung dienten Latten oder Stahlbänder, wie es gerade den Umständen nach geeigneter erschien. Die Linien sind naturgemäss sehr zahlreich, aber auch sehr kurz; 80 % sind unter 50 m. Ihre Anzahl beträgt im ganzen rund 7500.

Dies Material war ursprünglich für die vorliegende Arbeit in Aussicht genommen.

Als mir vor zwei Jahren die Aufsicht über die Neumessungen in der südlichen Vorstadt übertragen wurde, entschloss ich mich zur Abänderung einiger bis dahin gebräuchlicher Sachen. Einesteils legte ich sämtliche Linien auf die

Bürgersteige, soweit es nur irgend möglich war; zweitens nahm ich die Polygonseiten so lang, wie es die Örtlichkeit zuliess, um die Winkelmessungen auf das geringste Mass zu beschränken. — Weil nun die Hauptpolygonseiten später für die Kleinvermessung dienen konnten und sollten, so wurden sie sorgfältig mit dem Theodolit ausgerichtet und durch Marken (Kreuze, Gasrohre) in 30 m Abstand festgelegt, um dem später kommenden Feldmesser die Mühe des nochmaligen Ausrichtens zu ersparen. Diese Marken sind nun bei beiden Messungen der Linie mit angeschrieben worden. Hierdurch ergibt sich eine grosse Menge von Doppelmessungen. Denn eine Linie von 300 m z. B. enthält zehnmal die Strecke 30 m, neunmal die Strecke 60 m, zweimal die Strecke 270 m und einmal die Strecke 300 m. Zur Messung sind gewöhnliche hölzerne Messlatten benutzt; die Messungen selbst sind von zwei jungen Leuten ausgeführt, welche erst wenig Übung und Erfahrung hatten; die Resultate sind also derart, dass sie überall unter gleichen äusseren Umständen wieder erreicht, wahrscheinlich übertroffen werden können. Die Anzahl dieser Doppelmessungen beträgt rund 3500.

Es liegen somit gegen 12 000 Doppelmessungen vor.

4. **Gruppen und Durchschnittswerte.** In erster Linie hängen die Fehler der Längenmessungen von äusseren Umständen ab. Man muss also Messungen, welche gleicher Art sind, zu einer Gruppe vereinigen, wenn man über die Beträge der Fehler Kenntnis zu erlangen wünscht; und je zahlreicher eine Gruppe ist, desto mehr Vertrauen verdienen die abgeleiteten Mittelwerte der Fehler. In zweiter Linie nehmen die Fehler mit der Länge zu; man muss also wieder kleinere Untergruppen bilden, in denen alle Längen so ziemlich gleich sind.

Für uns sind die oben bezeichneten drei Gruppen fest gegeben. Mit Rücksicht auf die Länge der Linien haben wir dann Gruppe I in 20, Gruppe II in 11 und Gruppe III in 18 Unterabteilungen geteilt (à ca. 35, 700 und 200 Doppel-

messungen). Teilt man jede Gruppe nur in zwei Teile, so ergibt

Gruppe I:	a.	Mittellänge	44,4 m,	mittlere	Abweichung	1,6 mm,
	b.	„	97,3 „	„	„	2,3 „
Gruppe II:	a.	„	10,3 „	„	„	2,1 „
	b.	„	38,6 „	„	„	3,8 „
Gruppe III:	a.	„	60,2 „	„	„	2,2 „
	b.	„	239,0 „	„	„	3,5 „

Dies zeigt schon, dass die Abweichungen wohl mit der Länge, aber nicht im Verhältnis der Länge wachsen, auch wie sehr Gruppe II von den andern beiden abweicht. Alles weitere ergibt sich aus folgender Zusammenstellung.

Gruppe I enthält 694 Doppelmessungen von Seiten zwischen 3,7 und 192,8 Länge. Alles Lattenmessungen. Die Längen sind in Metern, die Abweichungen in Millimetern angegeben. Die Abweichungen erreichen den Betrag von 20 mm überhaupt nicht, der Betrag von 10 mm ist siebenmal überschritten. Die Messungen sind genau nach der Grösse der Linien geordnet und sodann folgende Untergruppen à 34 oder 35 Stück gebildet:

				Abweichung		
	L =	von	bis	a =	von	bis
1.	16,77 m	3,7	22,5 m	1,63 mm	0	9 mm
2.	26,76 „	22,7	30,9 „	1,25 „	0	7 „
3.	34,46 „	31,6	37,4 „	1,65 „	0	5 „
4.	39,39 „	37,7	42,2 „	1,61 „	0	4 „
5.	44,52 „	42,6	46,8 „	1,76 „	0	9 „
6.	47,99 „	47,6	49,6 „	2,06 „	0	9 „
7.	52,00 „	49,7	54,3 „	1,39 „	0	5 „
8.	55,77 „	54,3	57,4 „	1,41 „	0	7 „
9.	60,83 „	57,7	63,3 „	1,36 „	0	7 „
10.	65,37 „	63,3	66,8 „	2,01 „	0	15 „
11.	69,37 „	66,9	72,6 „	1,88 „	0	15 „
12.	74,31 „	72,7	76,2 „	1,73 „	0	5 „
13.	78,35 „	76,4	80,2 „	1,66 „	0	5 „

				Abweichung		
	L =	von	bis	a =	von	bis
14.	82,49 m	80,7	84,7 m	1,79 mm	0	8 mm
15.	87,52 „	84,9	90,6 „	1,86 „	0	9 „
16.	93,47 „	90,7	97,5 „	1,94 „	0	7 „
17.	100,63 „	97,7	104,5 „	2,89 „	0	12 „
18.	109,49 „	104,9	115,6 „	1,73 „	0	4,5 „
19.	125,42 „	115,7	138,8 „	4,32 „	0	17 „
20.	151,71 „	139,9	192,8 „	3,33 „	0	16 „

Gruppe II enthält 7560 Nebenpolygonseiten von 0,2 bis 126 m. Teilweise Lattenmessung, grösstenteils Stahlband. Die Seiten sind nach der Grösse geordnet und sodann zu folgenden 11 Untergruppen vereinigt:

	L =	von	bis	Anzahl	a =	von	bis
1.	4,83 m	0,2	6,6	700	1,30 mm	0	15 mm
2.	7,98 „	6,6	9,3	700	1,76 „	0	20 „
3.	10,39 „	9,3	11,5	700	1,91 „	0	25 „
4.	12,77 „	11,5	14,0	700	2,50 „	0	30 „
5.	15,37 „	14,0	16,8	700	3,11 „	0	35 „
6.	18,46 „	16,8	20,2	700	3,19 „	0	30 „
7.	22,51 „	20,2	25,0	700	3,57 „	0	40 „
8.	28,17 „	25,0	32,0	700	3,72 „	0	40 „
9.	37,15 „	32,0	43,0	700	3,70 „	0	30 „
10.	46,77 „	43,0	59,0	630	3,91 „	0	50 „
11.	78,78 „	59,0	126,0	630	4,87 „	0	56 „

Gruppe III. 3486 Doppelmessungen in der südlichen Vorstadt, zwischen 1 und 600 m. Die Messungen sind nach der Grösse geordnet und zu folgenden 18 Mittelwerten vereinigt:

					Abweichung			
	L =	von	bis		a =	von	bis	Anzahl
1.	12,9	1	23 m		1,89 mm	0	12 mm	200
2.	29,2	23	30 „		1,80 „	0	10 „	200
3.	30,5	30	35 „		1,86 „	0	11 „	200

	L =	von	bis	Abweichung a =	von	bis	Anzahl
4.	46,5	35	60 m	2,16 mm	0	13 mm	200
5.	60,0	60	60 „	2,12 „	0	10 „	200
6.	65,8	60	75 „	2,06 „	0	12 „	200
7.	87,2	75	90 „	2,31 „	0	14 „	200
8.	93,8	90	105 „	2,52 „	0	12 „	200
9.	116,4	105	120 „	2,84 „	0	13 „	200
10.	126,5	120	140 „	2,93 „	0	17 „	200
11.	148,4	140	150 „	3,10 „	0	17 „	200
12.	164,0	150	180 „	2,59 „	0	15 „	200
13.	185,3	180	200 „	3,22 „	0	13 „	200
14.	213,0	200	230 „	3,27 „	0	13 „	200
15.	245,9	230	270 „	3,51 „	0	14 „	200
16.	286,6	270	320 „	3,86 „	0	18 „	200
17.	342,2	320	385 „	4,03 „	0	17 „	150
18.	439,2	385	580 „	4,94 „	0	21 „	136

Die Abweichung 20 mm ist nur einmal mit 21 mm auf L = 450 m überschritten. Abweichungen über 10 mm finden sich 66, davon 25 bei den Längen bis 200 m (2600 Stück), mithin rund 1 %, wie Gruppe I (7 auf 694).

Nicht berücksichtigt sind folgende auf einem Kieswege ausgeführten Doppelmessungen:

L =	635 m	a	12 mm
	665 „		13 „
	675 „		22 „
	750 „		12 „
	790 „		22 „

5. **Ausgleichung vorstehender Gruppen. Erste Annahme** $A = q \cdot L^e$. Es sei die Linie L in Metern, die mittlere Abweichung der Doppelmessungen a in Millimetern gegeben. Innerhalb einer Gruppe gleichartiger Messungen hängt a von der Länge ab: $a = F(L)$. Der einfachste hier denkbare Fall

ist nun $a = q \cdot L^e$, wo e irgend ein Exponent ist. Wäre e für alle möglichen Längenmessungen gleich, z. B. $= 1/2$, so wäre die Konstante q das Mass für die Güte der Messungen.

Voraussichtlich wird sich kein Wert für q und e finden lassen, welcher die Abweichungen (a) ergibt; wir müssen uns also damit begnügen, eine neue Reihe (A) zu bestimmen, welche einerseits der geforderten Beziehung genügt, andererseits den Werten (a) möglichst nahekommt. Setzen wir $a_n + v_n = A_n$, so sind bekanntlich diejenigen Werte (A) die besten, für welche die Quadratsumme $(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + +)$ möglichst klein ist, in üblicher Schreibweise

$$[v^2] = \text{Min.}$$

Für einen beliebigen Wert von e haben wir (e konstant)

$$A_n = a_n + v_n = q \cdot L_n^e$$

$$v_n = q \cdot L_n^e - a_n,$$

also mit $[\cdot\cdot]$ als Summenzeichen

$$[v^2] = q^2[L^{2e}] - 2q \cdot [aL^e] + [a^2] = \text{Min.}$$

Aus $\frac{d[v^2]}{dq} = o$ folgt

$$q = \frac{[a\,L^e]}{[L^{2e}]}. \qquad (1).$$

Gruppe I. Es ist q und $[v^2]$ für verschiedene Werte von e berechnet und es hat sich ergeben:

$A = 0{,}2403\ L^{0{,}5}$	$[v^2] = 5{,}64$	
$A = 0{,}1928\ L^{0{,}55}$	$5{,}56$	
$A = 0{,}1620\ L^{0{,}59}$	$5{,}54$	
$A = 0{,}1551\ L^{0{,}60}$	$5{,}53$	(Min.)
$A = 0{,}1484\ L^{0{,}61}$	$5{,}54$	
$A = 0{,}1419\ L^{0{,}62}$	$5{,}56$	
$A = 0{,}0226\ L$	$7{,}38.$	

Wir sehen, dass die Quadratsumme für $L^{0{,}5}$ viel kleiner ist, als für L^1; der günstigste Wert $[v^2]$ ergibt sich aber für den Exponenten 0,6.

Für $A = 0{,}1551\ L^{0{,}6}$ ergeben sich folgende Werte für v und v^2:

	a	A	+ v	—	v^2
1.	1,63	0,84		0,79	0,6241
2.	1,25	1,11		0,14	0,0196
3.	1,65	1,30		0,35	0,1225
4.	1,61	1,41		0,20	0,0400
5.	1,76	1,51		0,25	0,0625
6.	2,06	1,58		0,48	0,2304
7.	1,39	1,66	0,27		0,0729
8.	1,41	1,73	0,32		0,1024
9.	1,36	1,82	0,46		0,2116
10.	2,01	1,90		0,11	0,0121
11.	1,88	1,97	0,09		0,0081
12.	1,73	2,06	0,33		0,1089
13.	1,66	2,12	0,46		0,2116
14.	1,79	2,19	0,40		0,1600
15.	1,86	2,27	0,41		0,1681
16.	1,94	2,36	0,42		0,1764
17.	2,89	2,47		0,42	0,1764
18.	1,73	2,59	0,86		0,7396
19.	4,32	2,82		1,50	2,2500
20.	3,33	3,16		0,17	0,0289
					5,5261

Zur Bestimmung von q genügt ein Wert von a und L — wenn alles richtig wäre —; überschüssig 19 Werte. Der mittlere Fehler eines Wertes a ist also

$$M = \sqrt{\frac{5{,}5261}{19}} = \sqrt{0{,}291} = \pm 0{,}54 \text{ mm}.$$

Zu beachten ist, dass die ersten sechs Werte v negativ sind, auch ist der grosse Wert des ersten v auffällig.

Gruppe II. Hier ergab sich für verschiedene Werte von e folgendes:

$A = 1{,}2476\ L^{0,3}$	$[v^2] =$	1,65
$A = 1{,}0578\ L^{0,35}$		1,22
$A = 0{,}9561\ L^{0,38}$		1,1195
$A = 0{,}9241\ L^{0,39}$		1,1141 (Min.).
$A = 0{,}8931\ L^{0,4}$		1,1224
$A = 0{,}6286\ L^{0,5}$		1,90
$A = 0{,}0889\ L$		18,85

Für den besten Wert $0{,}9241\ L^{0,39}$ ergibt sich:

	a	A	+ v	− v	v^2
1.	1,30	1,7080	0,4080		0,1665
2.	1,76	2,0774	0,3174		0,1007
3.	1,91	2,3026	0,3926		0,1541
4.	2,50	2,4955		0,0045	0,0000
5.	3,11	2,6825		0,4275	0,1828
6.	3,19	2,8811		0,3089	0,0954
7.	3,57	3,1130		0,4570	0,2088
8.	3,72	3,3975		0,3225	0,1040
9.	3,70	3,7847	0,0847		0,0072
10.	3,91	4,1403	0,2303		0,0530
11.	4,87	5,0739	0,2039		0,0416
					1,1141

Da 10 Werte überschüssig sind, wenn es sich um die Bestimmung von q handelt, so ergibt sich für den mittleren Fehler $M^2 = 0{,}1114$ $M = \pm 0{,}334$ mm.

Dass der mittlere Fehler hier kleiner ausfällt, als in Gruppe I, ist nur scheinbar, da es sich hier um Mittelwerte aus durchschnittlich 687 Messungen, bei Gruppe I aber um Mittel aus nur 34,7 Messungen handelt. Bei gleicher Genauigkeit wie in Gruppe I wäre hier zu erwarten $0{,}54 \sqrt{\frac{34{,}7}{687}} = 0{,}12$ mm.

Die Genauigkeit der Gruppe I ist also $2^3/_4$mal grösser als die der Gruppe II.

Gruppe III. Für verschiedene Werte von e ergab sich folgendes:

$A = 1{,}1174\ L^{0{,}2}$	$[v^2] = 3{,}03$
$A = 0{,}6798\ L^{0{,}3}$	1,31
$A = 0{,}5267\ L^{0{,}35}$	1,12 (Min.).
$A = 0{,}4065\ L^{0{,}4}$	1,32
$A = 0{,}2395\ L^{0{,}5}$	2,71
$A = 0{,}0146\ L$	21,02

Für den günstigsten Wert $A = 0{,}5267\ L^{0{,}35}$ ergibt sich:

	a	A	+ v	— v	v^2
1.	1 89	1,2889		0,6011	0,3613
2.	1,80	1,7156		0,0844	0,0071
3.	1,86	1,7424		0,1176	0,0138
4.	2,16	2,0195		0,1405	0,0197
5.	2,12	2,2075	0,0875		0,0077
6.	2,06	2,2802	0,2202		0,0485
7.	2,31	2,5162	0,2062		0,0425
8.	2,52	2,5815	0,0615		0,0038
9.	2,84	2,7838		0,0562	0,0032
10.	2,93	2,8665		0,0635	0,0040
11.	3,10	3,0308		0,0692	0,0048
12.	2,59	3,1388	0,5488		0,3012
13.	3,22	3,2763	0,0563		0,0032
14.	3,27	3,4395	0,1695		0,0287
15.	3,51	3,6171	0,1071		0,0115
16.	3,86	3,8162		0,0438	0,0019
17.	4,03	4,0606	0,0306		0,0009
18.	4,94	4,4314		0,5086	0,2587
					1,1225

Hieraus weiter $M^2 = \frac{1{,}1225}{17} = 0{,}0660$; $M = \pm 0{,}257$ mm.

Wir haben es hier mit Mitteln aus durchschnittlich 194 Einzel-

messungen zu tun. Bei gleicher Genauigkeit wie Gruppe I hätten wir erwarten können

$$0{,}54 \cdot \sqrt{\frac{34{,}7}{194}} = \pm 0{,}23 \text{ mm anstatt } 0{,}257.$$

Die Genauigkeit ist also fast dieselbe wie in Gruppe I.

In allen drei Gruppen ist es also ein anderer Exponent, welcher die beste Übereinstimmung zwischen A und a vermittelt; in allen drei Gruppen liegt dieser Exponent näher bei 0,5, als bei 1,0, ohne aber 0,5 sehr nahe zu kommen.

6. **Zweite Annahme: $A = p + q \cdot L^e$.** Entsprechend der Elsässischen und Hessischen Formel ($A = p + qL$) bilden wir vorstehenden allgemeineren Ausdruck. Von der Annahme I unterscheidet sich der Ausdruck durch die Konstante p.

Ist wiederum $A_n = a_n + v_n$, so ist (e konstant)

$$v_n = p + q \cdot L^e{}_n - a_n \qquad \text{Anzahl} = n$$

$$[v^2] = np^2 + 2pq[L^e] + [L^{2e}]q^2 - 2[a]p - 2[aL^e] \cdot q + [a^2].$$

Hieraus:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \cdot [v^2]}{\partial p} &= np + [L^e] \cdot q - [a] = 0 \\ \frac{\partial \cdot [v^2]}{\partial q} &= [L^e] \cdot p + [L^{2e}] \cdot q - [aL^e] = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Aus diesen beiden Gleichungen findet man p und q. Beiläufig bemerkt, ist in diesem Falle immer $[A] = [a]$, also konstant.

Gruppe I. Für eine Reihe verschiedener Werte von e hat sich folgendes ergeben:

$A =$	$-0{,}0357 + 0{,}2445$	$L^{0,5}$	$[v^2] = 5{,}62$
$A =$	$+0{,}2481 + 0{,}1368$	$L^{0,6}$	$5{,}48$
$A =$	$0{,}4562 + 0{,}0782$	$L^{0,7}$	$5{,}27$
$A =$	$0{,}6096 + 0{,}0456$	$L^{0,8}$	$5{,}13$
$A =$	$0{,}7336 + 0{,}0268$	$L^{0,9}$	$4{,}98$
$A =$	$0{,}8345 + 0{,}0159$	L	$4{,}84$

A =	+ 0,9188 + 0,009514	$L^{1,1}$	$[v^2]$ = 4,71
A =	0,9907 + 0,005706	$L^{1,2}$	4,60
A =	1,0529 + 0,003434	$L^{1,3}$	4,47
A =	1,1075 + 0,002071	$L^{1,4}$	4,40
A =	1,1560 + 0,001252	$L^{1,5}$	4,32
A =	1,1994 + 0,000758	$L^{1,6}$	4,25
A =	1,2387 + 0,000459	$L^{1,7}$	4,18
A =	1,2745 + 0,000278	$L^{1,8}$	4,13
A =	1,3072 + 0,000169	$L^{1,9}$	4,09
A =	1,3372 + 0,000102	$L^{2,0}$	4,03
A =	1,3651 + 0,00006204	$L^{2,1}$	3,99
A =	1,3909 + 0,00003763	$L^{2,2}$	3,99
A =	1,4150 + 0,00002282	$L^{2,3}$	3,98 (Min.)
A =	1,4374 + 0,00001383	$L^{2,4}$	3,98
A =	1,4583 + 0,00000839	$L^{2,5}$	3,98
A =	1,4780 + 0,00000508	$L^{2,6}$	4,00
A =	1,5456 + 0,00000068	$L^{3,0}$	4,10

Für den günstigsten Wert A = 1,4150 + 0,00002282 $L^{2,3}$ ergibt sich:

	a	A	+ v	— v	v^2
1.	1,63	1,43		0,20	0,0400
2.	1,25	1,46	0,21		0,0441
3.	1,65	1,49		0,16	0,0256
4.	1,61	1,52		0,09	0,0081
5.	1,76	1,56		0,20	0,0400
6.	2,06	1,58		0,48	0,2304
7.	1,39	1,62	0,23		0,0529
8.	1,41	1,65	0,24		0,0576
9.	1,36	1,70	0,34		0,1156
10.	2,01	1,76		0,25	0,0625
11.	1,88	1,81		0,07	0,0049
12.	1,73	1,87	0,14		0,0196
13.	1,66	1,93	0,27		0,0729

	a	A	+ v	— v	v^2
14.	1,79	2,00	0,21		0,0441
15.	1,86	2,08	0,22		0,0484
16.	1,94	2,19	0,25		0,0625
17.	2,89	2,34		0,55	0,3025
18.	1,73	2,53	0,80		0,6400
19.	4,32	2,94		1,38	1,9044
20.	3,33	3,78	0,45		0,2025
	39,26	39,24			3,9786

Hier sind zwei Konstante zu bestimmen, also $M^2 = \sqrt{\frac{3,98}{18}}$; $M = \pm 0,470$ mm. Die Übereinstimmung zwischen (a) und (A) ist also wesentlich besser geworden.

Gruppe II. Für verschiedene Werte von e ergab sich folgendes:

$A = -41,4770 + 40,7416\ L^{0,03}$	$[v^2] =$	0,603
$A = -29,7779 + 29,1570\ L^{0,04}$		0,594 (Min.)
$A = -22,5424 + 22,0637\ L^{0,05}$		0,595
$A = -\ 9,6952 + 9,4585\ L^{0,10}$		0,64
$A = -\ 5,4235 + 5,4047\ L^{0,15}$		0,70
$A = -\ 3,2596 + 3,4539\ L^{0,20}$		0,76
$A = -\ 1,9762 + 2,3576\ L^{0,25}$		0,84
$A = -\ 1,1212 + 1,6740\ L^{0,30}$		0,93
$A = -\ 0,5036 + 1,2184\ L^{0,35}$		1,02
$A = -\ 0,0388 + 0,9034\ L^{0,40}$		1,12
$A = +\ 0,0411 + 0,8523\ L^{0,41}$		1,14
$A = +\ 0,6146 + 0,5160\ L^{0,50}$		1,34
$A = +\ 1,9136 + 0,0433\ L$		2,69

Der günstigste Wert ergibt sich für den Exponenten 0,04. Die Werte A und v werden folgende:

	a	A	+ v	— v	v^2
1.	1,30	1,2742		0,0258	0,0007
2.	1,76	1,9040	0,1440		0,0207

	a	A	+ v	— v	v^2
3.	1,91	2,2422	0,3322		0,1104
4.	2,50	2,5076	0,0076		0,0001
5.	3,11	2,7467		0,3623	0,1320
6.	3,19	2,9857		0,2043	0,0417
7.	3,57	3,2482		0,3218	0,1036
8.	3,72	3,5426		0,1774	0,0315
9.	3,70	3,9158	0,2158		0,0466
10.	3,91	4,2278	0,3178		0,1010
11.	4,87	4,9451	0,0751		0,0056
	33,54	33,5399			0,5939

$M^2 = \frac{0{,}594}{9} = 0{,}066$; $M = \pm 0{,}257$ mm. Mit Rücksicht auf die Anzahl hätte der Gruppe I ein mittlerer Fehler von 0,106 mm entsprochen, also $\frac{M_{II}}{M_I}$ 2,43 : 1.

Gruppe III. Für verschiedene Werte von e ergab sich:

$A = 0{,}8619 + 0{,}174414\, L^{0,5}$	$[v^2] = 0{,}76$
$A = 1{,}1511 + 0{,}089768\, L^{0,6}$	0,61
$A = 1{,}3619 + 0{,}047084\, L^{0,7}$	0,51
$A = 1{,}5235 + 0{,}024996\, L^{0,8}$	0,46
$A = 1{,}6522 + 0{,}013374\, L^{0,9}$	0,45 (Min.)
$A = 1{,}7575 + 0{,}007194\, L$	0,48

Für den günstigsten Exponenten 0,9 ergibt sich:

	a	A	+ v	— v	v^2
1.	1,89	1,7858		0,1042	0,0109
2.	1,80	1,9309	0,1309		0,0171
3.	1,86	1,9420	0,0820		0,0067
4.	2,16	2,0758		0,0842	0,0071
5.	2,12	2,1850	0,0650		0,0042
6.	2,06	2,2312	0,1712		0,0293
7.	2,31	2,3982	0,0882		0,0078
8.	2,52	2,4488		0,0712	0,0051

	a	A	+ v	— v	v^2
9.	2,84	2,6197		0,2203	0,0485
10.	2,93	2,6948		0,2352	0,0553
11.	3,10	2,8560		0,2440	0,0595
12.	2,59	2,9693	0,3793		0,1439
13.	3,22	3,1223		0,0977	0,0095
14.	3,27	3,3187	0,0487		0,0024
15.	3,51	3,5486	0,0386		0,0015
16.	3,86	3 8289		0,0311	0,0010
17.	4,03	4,2055	0,1755		0,0308
18.	4,94	4,8485		0,0915	0,0084
	51,01	51,0100			0,4490

$$M^2 = \frac{0{,}4490}{16} = 0281\,;\quad M = \pm 0{,}1675\text{ mm}.$$

Dem mittleren Fehler der Gruppe I ($\pm 0{,}47$) würde mit Rücksicht auf die in beiden Fällen zu einem Mittel vereinigte Anzahl (34,7 resp. 194) ein mittlerer Fehler von $\pm 0{,}1985$ mm entsprechen.

In allen drei Fällen ist nicht nur die Quadratsumme, sondern auch der mittlere Fehler heruntergegangen:

In Gruppe I $[v^2]$ von 5,53 auf 3,98; M von 0,54 auf 0,47,
„ „ II „ „ 1,11 „ 0,59; „ „ 0,334 „ 0,257,
„ „ III „ „ 1,12 „ 0,45; „ „ 0,257 „ 0,1675.

Dagegen sind die drei Exponenten sehr verschieden ausgefallen, 2,3 — 0,04 und 0,9, weit mehr als bei der ersten Annahme (0,6 — 0,39 — 0,35).

7. **Dritte Annahme: $A = \sqrt{p + qL^e}$ oder $A^2 = p + q \cdot L^e$.** Da $A_n = a_n + v_n$ ist, so ist $A_n^2 = a_n^2 + 2\,a_n v_n + v_n^2$. Ist es zulässig, v_n^2 zu vernachlässigen, so ist

$$a_n^2 + 2\,a_n v_n = p + qL_n^e.$$

Mit Einführung von $\alpha = \frac{1}{a}$ erhalten wir

$$v_n = \alpha_n \cdot \frac{p}{2} + \frac{\alpha_n L_n^e \cdot q}{2} - \frac{1}{2\,\alpha_n}. \qquad \text{Anzahl} = n.$$

Hieraus weiter $[v^2]$ und sodann:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \cdot [v^2]}{\partial p} &= [\alpha^2]p + [\alpha^2 L^e]q - n = 0 \\ \frac{\partial \cdot [v^2]}{\partial q} &= [\alpha^2 L^e]p + [\alpha^2 L^{2e}]q - [L^e] = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Aus diesen beiden Gleichungen würde man p und q finden, wenn die Vernachlässigung von v^2 zulässig wäre. Dies ist besonders in Gruppe I nicht der Fall. Ist z. B. bei Nr. 19 a — 4,32, v = 1,38, A — 2,94, so wird man v^2 — 1,9 bei einer Gesamtsumme $[v^2]$ 4,0 nicht vernachlässigen dürfen, und daher sind die aus (3) folgenden Werte für p und q nur Näherungswerte. Zu besseren Werten kann man auf folgende Weise gelangen:

a. Kennt man nach (3) p und q näherungsweise, so kennt man auch $[v^2]$ annähernd. Setzt man diese Näherungswerte ein in die Gleichung $A_n^2 - a_n^2 + 2\,a_n v_n + v_n^2 = p + q \cdot L_n^e$, indem man $(a_n^2 + v_n^2)$ zusammenfasst zu einem Wert b_n^2, so erhält man zunächst

$$v = \frac{p}{2\,a} + \frac{L^e}{2\,a} \cdot q - \frac{b^2}{2\,a}$$

und hieraus bessere Werte für p und q. Hierbei muss $[v^2]$ immer kleiner werden; meistens wird auch [A] sich [a] nähern. — In Gruppe I ist [a] 39,26. Nun ergab die erste Rechnung nach (3) für $A^2 = p + q \cdot L$

$A^2 = 0{,}49 + 0{,}0421\,L \qquad [v^2] = 6{,}19 \qquad [A] = 36{,}51.$

Weiter nach Einführung von b^2 nach und nach:

$A = 0{,}38 + 0{,}0459\,L$	$[v^2]$ 5,89	[A] = 37,28	[a] = 39,26
$A = 0{,}30 + 0{,}0496\,L$	5,71	38,13	39,26
$A = 0{,}22 + 0{,}0533\,L$	5,62	38,96	39,26
$A = 0{,}15 + 0{,}0571\,L$	5,67	39,89	39,26

Das Minimum liegt offenbar in der Nähe des vorletzten Wertes.

b. Hat man auf diese Weise — oder sonstwie — gewisse Näherungswerte $\mathfrak{A}$ p q für die Unbekannten A p q

gefunden und ist $A = \mathfrak{A} + \Delta\mathfrak{A}$, $p = \mathfrak{p} + \Delta p$, $q = \mathfrak{q} + \Delta q$, gleichzeitig aber $\Delta\mathfrak{A}$ so klein, dass man ohne Fehler setzen darf $A^2 = \mathfrak{A}^2 + 2\,\mathfrak{A} \cdot \Delta\mathfrak{A}$, so ist auch, da $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{p} + \mathfrak{q} \cdot L^e$ ist,

$$A^2 = \mathfrak{A}^2 + 2\,\mathfrak{A}\Delta\mathfrak{A} = \mathfrak{p} + \mathfrak{q} \cdot L^e + \Delta p + L^e \cdot \Delta q,$$

mithin

$$\Delta\mathfrak{A} = \frac{1}{2\,\mathfrak{A}} \cdot \Delta p + \frac{L^e}{2\,\mathfrak{A}} \cdot \Delta q.$$

Nun ist $A = a + v = \mathfrak{A} + \Delta\mathfrak{A} = \mathfrak{A} + \frac{1}{2\,\mathfrak{A}} \cdot \Delta p + \frac{L^e}{2\,\mathfrak{A}} \cdot \Delta q$, also mit $m = \frac{1}{2\,\mathfrak{A}}$:

$$v_n = m_n \cdot \Delta p + m_n L_n^e \cdot \Delta q + (\mathfrak{A}_n - a_n \cdot \qquad [v^2] = \text{Min.}$$

Setzt man noch $(\mathfrak{A}_n - a_n) = f_n$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} [m^2] \cdot \Delta p + [m^2 L^e] \Delta q + [mf] &= 0 \\ [m^2 L^e] \cdot \Delta p + [m^2 L^{2e}] \cdot \Delta q + [mL^e f] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Ist die Näherung $\mathfrak{A}$ genügend richtig gewesen, so muss jetzt sein $A - \mathfrak{A} + \Delta\mathfrak{A} = \mathfrak{A} + m \cdot \Delta p + m \cdot L^e \cdot \Delta q$; andernfalls ist die Rechnung zu wiederholen.

Gruppe I. Auf diese ziemlich umständliche Weise sind zunächst berechnet:

$A^2 = p + q \cdot L$	$[v^2] = 5{,}61$
$A^2 = p + q \cdot L^2$	4,36
$A^2 = p + q \cdot L^3$	3,91
$A^2 = p + q \cdot L^4$	4,01

Die dazwischenliegenden Werte sind durch Interpolation bestimmt, wobei sich folgendes ergeben hat:

$A^2 = 0{,}254 + 0{,}0542$	L	$[v^2] = 5{,}61$
$A^2 = 0{,}653 + 0{,}0203$	$L^{1,2}$	5,30
$A^2 = 0{,}948 + 0{,}0077$	$L^{1,4}$	5,02
$A^2 = 1{,}180 + 0{,}00294$	$L^{1,6}$	4,78
$A^2 = 1{,}365 + 0{,}00112$	$L^{1,8}$	4,56
$A^2 = 1{,}522 + 0{,}00043$	$L^{2,0}$	4,36
$A^2 = 1{,}658 + 0{,}000164$	$L^{2,2}$	4,23
$A^2 = 1{,}775 + 0{,}0000628$	$L^{2,4}$	4,11

$A^2 = 1{,}884 + 0{,}0000239\ L^{2{,}6}$	$[v^2] = 4{,}02$
$A^2 = 1{,}982 + 0{,}00000907\ L^{2{,}8}$	$3{,}95$
$A^2 = 2{,}073 + 0{,}00000343\ L^{3{,}0}$	$3{,}91$
$A^2 = 2{,}159 + 0{,}00000129\ L^{3{,}2}$	$3{,}88$ (Min.)
$A^2 = 2{,}240 + 0{,}000000486\ L^{3{,}4}$	$3{,}90$
$A^2 = 2{,}317 + 0{,}000000182\ L^{3{,}6}$	$3{,}92$
$A^2 = 2{,}390 + 0{,}0000000678\ L^{3{,}8}$	$3{,}95$
$A^2 = 2{,}463 + 0{,}0000000252\ L^{4{,}0}$	$4{,}01$

Für den günstigsten Exponenten 3,2 ergeben sich folgende Werte A und v:

	a	A	+ v	— v	v^2
1.	1,63	1,47		0,16	0,0256
2.	1,25	1,49	0,24		0,0576
3.	1,65	1,51		0,14	0,0196
4.	1,61	1,52		0,09	0,0081
5.	1,76	1,55		0,21	0,0441
6.	2,06	1,57		0,49	0,2401
7.	1,39	1,60	0,21		0,0441
8.	1,41	1,63	0,22		0,0484
9.	1,36	1,68	0,32		0,1024
10.	2,01	1,73		0,28	0,0784
11.	1,88	1,78		0,10	0,0100
12.	1,73	1,85	0,12		0,0144
13.	1,66	1,91	0,25		0,0625
14.	1,79	1,98	0,19		0,0361
15.	1,86	2,07	0,21		0,0441
16.	1,94	2,18	0,24		0,0576
17.	2,89	2,34		0,55	0,3025
18.	1,73	2,55	0,82		0,6724
19.	4,32	2,98		1,34	1,7956
20.	3,33	3,80	0,47		0,2209
	39,26	39,19			3,8845

Der mittlere Fehler M eines Wertes a ergibt sich also zu

$$M = \sqrt{\frac{3{,}8845}{18}} = \pm 0{,}465 \text{ mm}.$$

Gruppe II. Wegen der gleichmässig ansteigenden Werte a gestaltete sich hier die Rechnung wesentlich einfacher und schneller, so dass in der Regel schon die erste Berechnung nach der Näherung zum Ziele führte. Für verschiedene Exponenten e ergaben sich folgende Werte:

$A^2 = -26 + 19{,}85\ L^{0,2}$	$[v^2] = 0{,}63$	
$A^2 = -15 + 10{,}14\ L^{0,3}$	0,573	(Min.)
$A^2 = -9{,}4 + 5{,}756\ L^{0,4}$	0,573	(Min.)
$A^2 = -5{,}93 + 3{,}438\ L^{0,5}$	0,63	
$A^2 = -3{,}75 + 2{,}138\ L^{0,6}$	0,74	
$A^2 = -0{,}65 + 0{,}852\ L^{0,8}$	1,09	
$A^2 = +1{,}44 + 0{,}341\ L$	1,58	

Der günstigste Wert des Exponenten ist also zwischen 0,3 und 04.

Für e = 0,3 ergibt sich:

	a	A	+ v	− v	v^2
1.	1,30	1,130		0,170	0,0289
2.	1,76	1,982	0,222		0,0493
3.	1,91	2,340	0,430		0,1849
4.	2,50	2,606	0,106		0,0112
5.	3,11	2,833		0,277	0,0767
6.	3,19	3,053		0,137	0,0188
7.	3,57	3,290		0,280	0,0784
8.	3,72	3,553		0,167	0,0279
9.	3,70	3,873	0,173		0,0299
10.	3,91	4,141	0,231		0,0534
11.	4,87	4,753		0,117	0,0137
	33,54	33,554			0,5731

Für e = 0,4 ergibt sich:

	a	A	+ v	— v	v^2
1.	1,30	1,196		0,104	0,0108
2.	1,76	1,957	0,197		0,0388
3.	1,91	2,303	0,393		0,1544
4.	2,50	2,562	0,062		0,0038
5.	3,11	2,791		0,319	0,1018
6.	3,19	3,016		0,174	0,0303
7.	3,57	3,259		0,311	0,0967
8.	3,72	3,535		0,185	0,0342
9.	3,70	3,881	0,181		0,0328
10.	3,91	4,174	0,264		0,0697
11.	4,87	4,861		0,009	0,0001
	33,54	33,535			0,5734

Der mittlere Fehler wird in beiden Fällen:

$$M = \sqrt{\frac{0,573}{9}} = \pm 0,2525 \text{ mm.}$$

Dem mittleren Fehler der Gruppe I würde entsprechen ± 0,104; Verhältnis 1 : 2,42.

Gruppe III. Hier ergab sich, und zwar ebenfalls erheblich leichter als bei Gruppe I:

$A^2 = 2,1851 + 0,043575\ L$	$[v^2] = 0,55$	
$A^2 \quad 2,8810 + 0,013410\ L^{1,2}$	0,46	(Min.)
$A^2 = 3,4225 + 0,004121\ L^{1,4}$	0,50	
$A^2 = 3,8649 + 0,001260\ L^{1,6}$	0,64	

Für den günstigsten Exponenten 1,2 ergibt sich:

	a	A	+ v	— v	v^2
1.	1,89	1,7803		0,1097	0,0120
2.	1,80	1,9105	0,1105		0,0122
3.	1,86	1,9213	0,0613		0,0038
4.	2,16	2,0555		0,1045	0,0109
5.	2,12	2,1693	0,0493		0,0024

	a	A	+ v	— v	v^2
6.	2,06	2,2180	0,1580		0,0250
7.	2,31	2,3956	0,0856		0,0073
8.	2,52	2,4496		0,0704	0,0050
9.	2,84	2,6311		0,2089	0,0436
10.	2,93	2,7106		0,2194	0,0481
11.	3,10	2,8793		0,2207	0,0487
12.	2,59	2,9966	0,4066		0,1653
13.	3,22	3,1531		0,0669	0,0045
14.	3,27	3,3507	0,0807		0,0065
15.	3,51	3,5773	0,0673		0,0045
16.	3,86	3,8468		0,0132	0,0002
17.	4,03	4,1980	0,1680		0,0282
18.	4,94	4,7718		0,1682	0,0283
	51.01	51,0154			0,4565

Der mittlere Fehler ergibt sich zu

$$M = \sqrt{\frac{0{,}4565}{16}} = \pm 0{,}169 \text{ mm}.$$

Der Gruppe I würde ein mittlerer Fehler von $\pm 0{,}196$ mm entsprechen.

Da die zweite Annahme $A = p + qL^e$ und die dritte Annahme $A^2 = p' + q' \cdot L^{e'}$ einander sehr nahe stehen, so mögen hier die günstigsten Ergebnisse noch einmal gegenübergestellt werden:

	Zweite Annahme:		Dritte Annahme:	
Gruppe I	$e = 2{,}3$;	$[v^2] = 3{,}98$	$e' = 3{,}2$	$[v^2] = 3{,}88$
Gruppe II	$e = 0{,}04$;	$[v^2] = 0{,}59$	$e' = 0{,}35$	$[v^2] = 0{,}57$
Gruppe III	$e = 0{,}9$;	$[v^2] = 0{,}45$	$e' = 1{,}2$	$[v^2] = 0{,}46$

Die dritte, theoretisch bessere Formel schliesst sich also den Werten a durchweg noch etwas besser an, als die empirische Formel der zweiten Annahme. Die Verschiedenheit der Exponenten bleibt natürlich auch hier.

8. **Vierte Annahme:** $A^2 = p + q \cdot L^e + r \cdot L^{2e}$. Setzt man zuerst näherungsweise $A^2 = a^2 + 2\,av$, so kann man Näherungswerte für p, q und r bestimmen und diese dann verbessern. Die Rechnung ist in beiden Fällen derjenigen für $A^2 = p + q \cdot L^e$ entsprechend. Es ergibt sich für Gruppe I:

$A^2 = 5{,}549 - 0{,}3404\ L^{0{,}8} + 0{,}008664\ L^{1{,}6}$ $\quad [v^2] = 3{,}92$

$A^2 = 4{,}003 - 0{,}08165\ L + 0{,}0009753\ L^2$ $\quad 3{,}84$

$A^2 = 3.159 - 0{,}01893\ L^{1{,}2} + 0{,}00011186\ L^{2{,}4}$ $\quad 3{,}84$

$A^2 = 2{,}701 - 0{,}004013\ L^{1{,}4} + 0{,}000013035\ L^{2{,}8}$ $\quad 3{,}84$

Der beste Wert ist allerdings $A^2 = p + qL^{1{,}2} + r \cdot L^{2{,}4}$, (etwas kleiner als 3,84); da aber $A^2 = p + qL + rL^2$ fast dieselbe Quadratsumme ergibt, so nehmen wir diesen Wert und erhalten:

	a	A	+ v	− v	v^2
1.	1,63	1,7052	0,0752		0,0057
2.	1,25	1,5862	0,3362		0,1130
3.	1,65	1,5320		0,1180	0,0139
4.	1,61	1,5167		0,0933	0,0087
5.	1,76	1,5168		0,2432	0,0591
6.	2,06	1,5266		0,5334	0,2845
7.	1,39	1,5474	0,1574		0,0248
8.	1,41	1,5756	0,1656		0,0274
9.	1,36	1,6263	0,2663		0,0709
10.	2,01	1,6831		0,3269	0,1069
11.	1,88	1,7412		0,1388	0,0193
12.	1,73	1,8224	0,0924		0,0085
13.	1,66	1,8955	0,2355		0,0555
14.	1,79	1,9760	0,1860		0,0346
15.	1,86	2,0803	0,2203		0,0485
16.	1,94	2,2119	0,2719		0,0739
17.	2,89	2,3796		0,5104	0,2605
18.	1,73	2,5990	0,8690		0,7552
19.	4,32	3,0173		1,3027	1,6970
20.	3,33	3,7501	0,4201		0,1765
	39,26	39,2892			3,8444

Der mittlere Fehler ergibt sich zu

$$M = \sqrt{\frac{3{,}8444}{17}} = \pm 0{,}4755. \quad \text{(Divisor jetzt } 20 - 3.\text{)}$$

Aus dem Wert des mittleren Fehlers ist zu schliessen, dass die jetzigen Werte A nicht besser sind als die letzten, wo zwar die Quadratsumme $[v^2]$ grösser war — 3,8845 —, der mittlere Fehler aber wegen des Divisors 18 entsprechend kleiner ($\pm 0{,}465$ mm).

Gruppe II. Hier ist nur ein Wert berechnet:

$$A^2 = -1{,}0791 + 0{,}60996\,L - 0{,}003981\,L^2.$$

Für diesen Wert ergibt sich:

	a	A	+ v	— v	v^2
1.	1,30	1,332	0,032		0,0010
2.	1,76	1,880	0,120		0,0144
3.	1,91	2,197	0,287		0,0824
4.	2,50	2,462		0,038	0,0014
5.	3,11	2,712		0,398	0,1584
6.	3,19	2,971		0,219	0,0480
7.	3,57	3,261		0,309	0,0955
8.	3,72	3,598		0,122	0.0149
9.	3,70	4,011	0,311		0,0967
10.	3,91	4,329	0,419		0,1756
11.	4,87	4,719		0,151	0,0228
	33,54	33,472			0,7111

$$M \sqrt{\frac{0{,}7111}{8}} \pm 0{,}2983 \text{ (zuletzt } 0{,}57 \text{ und } \pm 0{,}2525).$$

Der Gruppe I würde entsprechen $\pm 0{,}107$.

Gruppe III. Auch hier ist nur ein Wert berechnet:

$$A^2 = 2{,}7224 + 0{,}031868\,L + 0{,}0000342012\,L^2.$$

Es ergibt sich:

	a	A	+ v	— v	v^2
1.	1,89	1,772		0,118	0,0139
2.	1,80	1,919	0,119		0,0142
3.	1,86	1,930	0,070		0,0049
4.	2,16	2,068		0,092	0,0085
5.	2,12	2,181	0,061		0,0037
6.	2,06	2,229	0,169		0,0286
7.	2,31	2,400	0,090		0,0081
8.	2,52	2,452		0,068	0,0046
9.	2,84	2,626		0,214	0,0458
10.	2,93	2,702		0,228	0,0520
11.	3,10	2,864		0,236	0,0557
12.	2,59	2,978	0,388		0,1505
13.	3,22	3,131		0,089	0,0079
14.	3,27	3,326	0,056		0,0031
15.	3,51	3,553	0,043		0,0018
16.	3,86	3,830		0,030	0,0009
17.	4,03	4,199	0,169		0,0286
18.	4,94	4,829		0,111	0,0123
	51,01	50,989			0,4451

Der mittlere Fehler wird $\sqrt{\frac{0{,}4451}{15}} = \pm 0{,}1723$ mm (zuletzt 0,4565 und $\pm 0{,}169$ mm). Der der Gruppe I entsprechend mittlere Fehler ist $\pm 0{,}2013$ mm.

9. **Fünfte Annahme: $A^2 = qL + rL^2$** (Formel der Preussischen Vermessungs-Anweisung). Die Berechnungen sind den vorigen entsprechend:

Gruppe I. $A^2 = 0{,}0399\,L + 0{,}0002054\,L^2$.

	a	A	+ v	— v	v^2
1.	1,63	0,8528		0,7772	0,6040
2.	1,25	1,1024		0,1476	0,0218
3.	1,65	1,2726		0,3774	0,1424

	a	A	+ v	— v	v^2
4.	1,61	1,3752		0,2348	0,0551
5.	1,76	1,4779		0,2821	0,0796
6.	2,06	1,5456		0,5144	0,2646
7.	1,39	1,6221	0,2321		0,0539
8.	1,41	1,6927	0,2827		0,0799
9.	1,36	1,7856	0,4256		0,1811
10.	2,01	1,8674		0,1426	0,0203
11.	1,88	1,9385	0,0585		0,0034
12.	1,73	2,0250	0,2950		0,0870
13.	1,66	2,0949	0,4349		0,1891
14.	1,79	2,1658	0,3758		0,1412
15.	1,86	2,2510	0,3910		0,1529
16.	1,94	2,3507	0,4107		0,1686
17.	2,89	2,4692		0,4208	0,1771
18.	1,73	2,6140	0,8840		0,7815
19.	4,32	2,8701		1,4499	2,1025
20.	3,33	3,2838		0,0462	0,0021
					5,3081

$$M = \sqrt{\frac{5{,}3081}{18}} = \pm 0{,}543 \text{ mm.}$$

Gruppe II. $A^2 = 0{,}527\,L - 0{,}00301\,L^2$.

	a	A	+ v	— v	v^2
1.	1,30	1,573	0,273		0,0745
2.	1,76	2,004	0,244		0,0595
3.	1,91	2,270	0,360		0,1296
4.	2,50	2,498		0,002	0,0000
5.	3,11	2,718		0,392	0,1537
6.	3,19	2,950		0,240	0,0576
7.	3,57	3,216		0,354	0,1253
8.	3,72	3,529		0,191	0,0365
9.	3,70	3,927	0,227		0,0515
10.	3,91	4,251	0,341		0,1163
11.	4,87	4,778		0,102	0,0104
					0,8149

$$M^2 = \frac{0{,}8149}{9} \qquad M = \pm 0{,}301.$$

Der Gruppe I hätte entsprochen M = ± 0,1221.

Gruppe III. $A^2 = 0{,}07074\,L - 0{,}000055\,L^2$.

	a	A	+ v	− v	v^2
1.	1,89	0,950		0,940	0,8836
2.	1,80	1,421		0,379	0,1436
3.	1,86	1,451		0,409	0,1673
4.	2,16	1,781		0,379	0,1436
5.	2,12	2,012		0,108	0,0117
6.	2,06	2,102	0,042		0,0018
7.	2,31	2,398	0,088		0,0077
8.	2,52	2,480		0,040	0,0016
9.	2,84	2,737		0,103	0,0106
10.	2,93	2,841		0,089	0,0079
11.	3,10	3,047		0,053	0,0028
12.	2,59	3,182	0,592		0,3505
13.	3,22	3,350	0,130		0,0169
14.	3,27	3,546	0,276		0,0762
15.	3,51	3,751	0,241		0,0581
16.	3,86	3,969	0,109		0,0119
17.	4,03	4,215	0,185		0,0342
18.	4,94	4,523		0,417	0,1739
					2,1039

$$M = \sqrt{\frac{2{,}1039}{16}} = \sqrt{0{,}1315} = \pm 0{,}3627.$$

Der Gruppe I hätte M = ± 0,23 mm entsprochen.

10. **Zusammenstellung der günstigsten Werte und Prüfung derselben.** Wir fügen zum mittleren Fehler M noch einen zweiten auf die Einheit bezogenen mittleren Fehler m hinzu, welcher in Gruppe I = $M\sqrt{34{,}7}$, in Gruppe II = $M\sqrt{687}$, in Gruppe III = $M\sqrt{194}$ ist.

Somit ergab Gruppe I:

	[v²]	M	m
1. $A = 0{,}1551\ L^{0{,}6}$	5,53	± 0,54	± 3,2 mm
2. $A = 1{,}4150 + 0{,}00002282\ L^{2{,}3}$	3,98	± 0,47	± 2,8 „
3. $A^2 = 2{,}159 + 0{,}00000129\ L^{3{,}2}$	3,88	± 0,465	± 2,7 „
4. $A^2 = 4{,}003 - 0{,}08165\ L + 0{,}0009753\ L^2$	3,84	± 0,475	± 2,8 „
5. $A^2 = + 0{,}0399\ L + 0{,}0002054\ L^2$	5,31	± 0,54	± 3,2 „

Gruppe II:

	[v²]	M	m
1. $A = 0{,}9241\ L^{0{,}39}$	1,11	± 0,334	± 8,75 mm
2. $A = -29{,}7779 + 29{,}1570\ L^{0{,}04}$	0,59	± 0,257	± 6,75 „
3. $A^2 = -15 + 10{,}14\ L^{0{,}3}$	0,57	± 0,2525	± 6,6 „
4. $A^2 = - 1{,}0791 + 0{,}60996\ L - 0{,}003981\ L^2$	0,71	± 0,298	± 7,8 „
5. $A^2 = 0{,}527\ L - 0{,}00301\ L^2$	0,81	+ 0,301	± 7,9 „

Gruppe III:

	[v²]	M	m
1. $A = 0{,}5267\ L^{0{,}25}$	1,12	+ 0,257	± 3,6 mm
2. $A = 1{,}6522 + 0{,}013374\ L^{0{,}9}$	0,45	0,168	± 2,35 „
3. $A^2 = 2{,}8810 + 0{,}013410\ L^{1{,}2}$	0,46	± 0,169	± 2,35 „
4. $A^2 = 2{,}7224 + 0{,}031868\ L + 0{,}000034201\ L^2$	0,445	± 0,172	± 2,4 „
5. $A^2 = 0{,}07074\ L - 0{,}000{,}055\ L^2$	2,10	± 0,363	± 5,05 „

Wir hatten vor Beginn der Ausgleichungen gesehen (Seite 11), dass zwar die Fehler mit der Länge wachsen, aber langsamer als die Längen. Hieraus ist zu folgern:

a. der Koeffizient des höchsten Gliedes muss positiv sein; demnach scheiden als nicht allgemein gültig aus von Gruppe II Nr. 4 und 5, von Gruppe III Nr. 5 (damit wird auch Nr. 5 von Gruppe I hinfällig);

b. der Exponent kann nicht über 1 sein (also für $A^2 \lesseqgtr 2$); demnach scheiden aus von Gruppe I Nr. 2 und 3. Nach Ausscheidung dieser Werte sieht man an den mittleren Fehlern m, dass die Genauigkeit der Gruppe I

und der Gruppe III annähernd gleich ist und dass es daher zweckmässig sein wird, sie zusammen zu behandeln;

c. Nr. 1 der Gruppe I ($A = q \cdot L^{0,6}$) und Nr. 1 der Gruppe III ($A = q \cdot L^{0,35}$) weisen zusammen auf das Quadratwurzelgesetz hin.

Gruppe I ergab $A = 0{,}240\, L^{0,5}$ $[v^2] = 5{,}64$,
„ III desgl. $A = 0{,}24\, L^{0,5}$ $[v^2] = 2{,}71$.

Die mittleren Fehler sind:

$$\text{in Gruppe I} = \sqrt{\frac{5{,}64}{19}} = \sqrt{0{,}297};$$

also $M = \pm 0{,}547$ mm, $m = \pm 3{,}2$ mm;

$$\text{in Gruppe III} = \sqrt{\frac{2{,}71}{17}} = \sqrt{0{,}158};$$

also $M = \pm 0{,}398$, $m = \pm 5{,}55$ mm.

Der erheblich grössere Fehler in Gruppe III muss zum Teil daher rühren, dass sich letztere bis auf Längen von gegen 600 m, Gruppe I dagegen nur auf Längen bis 200 m bezieht, woraus weiter zu bezweifeln ist, dass das Quadratwurzelgesetz für längere Linien gültig ist. Aber auch für kurze Linien will es nicht passen. Bildet man die Werte A für $0{,}24 \sqrt{L}$ und vergleicht sie mit den gegebenen Abweichungen a, so sind in Gruppe I die ersten 6 von 20 und in Gruppe III sogar die ersten 11 von 18 A kleiner als die zugehörigen a. Nimmt man hierzu die hohen Beträge der $[v^2]$, 5,64 gegen 3,84 und 2,71 gegen 0,45, so kann das Quadratwurzelgesetz nur für eine rohe Annäherung gelten, die den einzigen Vorzug hat, dass sie besser ist als ein Ausdruck von der Form $A = q \cdot L$.

d. Die Beobachtung, dass für das Quadratwurzelgesetz (und für alle ähnlichen Ausdrücke) für kurze Linien A stets zu klein ausfällt, führt darauf, dass man daran

denkt, eine Konstante p hinzuzufügen. Überlegt man, dass im einfachsten Falle eine Längenmessung dadurch zustande kommt, dass man einen Massstab gegen zwei Punkte A und B legt, die Ablesungen für A und B macht und von einander abzieht (B — A), so sind folgende Fehler zu erwarten: Ablesefehler p_1 und p_2 und ein Fehler $q \cdot L$, welcher daher rührt, dass die Masseinheit nicht richtig ist usw. Von diesen Fehlern sind p_1 und p_2 von der Länge unabhängig. Je nach Art der Messwerkzeuge und der Punktbezeichnung werden sie 1 mm bis 2 oder 3 cm betragen und bei den gewöhnlichen Längenmessungen ohne weiteres vernachlässigt werden können; dafür müssen sie auch bei feineren Messungen wie hier berücksichtigt werden. Natürlich wird man p_1 und p_2 zu einem Wert p vereinigen. Wie berechtigt die Einführung von p ist, sieht man sofort, wenn man in jeder Gruppe Nr. 1 und 2 mit einander vergleicht. In Gruppe I fällt $[v^2]$ von 5,5 auf 4,0, in Gruppe II von 1,1 auf 0,6, in Gruppe III von 1,1 auf 0,45.

Hält man am Quadratwurzelgesetz fest, so kann man jetzt folgende Formeln aufstellen:

$$\alpha.\ A = p + q \sqrt{L} \qquad \text{und} \quad A^2 = p + qL.$$

Ebenso gut kann man aber auch die Längen selbst nehmen und hat

$$\beta.\ A = p + qL \qquad \text{und} \quad A^2 = p + qL^2.$$

Will man beides vereinigen, so erhält man

$$\gamma.\ A = p + q \sqrt{L} + rL \quad \text{und} \quad A^2 = p + q \cdot L + rL^2.$$

Zu letzterem Ausdruck gelangt man aber auch durch die Erwägung, dass sich die Preussische Formel $A^2 = qL + rL^2$ hier nicht bewährt hat, offenbar aus dem Grunde, dass ihr das konstante Glied p fehlt.

α. Für $A = p + q\sqrt{L}$ ergab

Gruppe I: $-0{,}0357 + 0{,}2445\,L^{0{,}5}$ $[v^2] = 5{,}62$ (5,64)

„ III: $+0{,}8619 + 0{,}1744\,L^{0{,}5}$ „ $= 0{,}76$ (2,71)

Die in Klammern beigefügten Werte sind für $A = q\sqrt{L}$.

Für $A^2 = p + qL$ ergab

Gruppe I: $0{,}254 + 0{,}0542\,L$ $[v^2] = 5{,}61$ (5,64)

„ III: $2{,}1851 + 0{,}0436\,L$ „ $= 0{,}55$ (2,71)

β. Für $A = p + q \cdot L$ ergab

Gruppe I: $0{,}8345 + 0{,}0159\,L$ $[v^2] = 4{,}84$

„ III: $1{,}7575 + 0{,}007194\,L$ „ $= 0{,}48$

Für $A^2 = p + q \cdot L^2$ ergab

Gruppe I: $1{,}522 + 0{,}00043\,L^2$ $[v^2] = 4{,}36$

„ III: nicht berechnet, weil über 1,0 (S. 27)

γ. Für $A^2 = p + qL + rL^2$ ergab

Gruppe I: $4{,}003 - 0{,}08165\,L + 0{,}0009753\,L^2$ $[v^2] = 3{,}84$

„ III: $2{,}7224 + 0{,}031868\,L + 0{,}00003420\,L^2$ „ $= 0{,}445$.

In Gruppe I hat die Hinzufügung von p wesentlichen Einfluss für $A = p + qL$; $A^2 = p + qL^2$ und $A^2 = p + qL + rL^2$.

In Gruppe III ist der Erfolg noch grösser, vielleicht abgesehen von $A^2 = p + q \cdot L^2$. Somit bleiben folgende beiden Ausdrücke über

$A = p + q \cdot L$ $[v^2] = 4{,}84$ bezw. 0,48

und $A^2 = p + qL + rL^2$; $[v^2] = 3{,}84$ bezw. 0,445,

als die besten unter den möglichen Ausdrücken. Der zweite Ausdruck, welcher alle möglichen Fehler berücksichtigt, ergibt zugleich in beiden Fällen die kleinste Fehlerquadratsumme $[v^2]$ und fast den kleinsten mittleren Fehler M, ist also als der richtigste Fehlerausdruck anzusehen. Der Hessisch-Elsässische Fehlerausdruck kommt ihm sehr nahe.

11. **Vereinigung von Gruppe I und III, Endwert von Gruppe II.**

a. Für den Fehlerausdruck

$$\underline{A = p + qL}$$

ergab Gruppe I: $A = 0{,}8345 + 0{,}0159\ L$ $[v^2] = 4{,}84$; $m = \pm 3{,}05$
„ III: $A = 1{,}7575 + 0{,}007194\ L$ „ $= 0{,}48$; „ $= \pm 2{,}4$

Mit Rücksicht auf die zu einem Mittelwert vereinigte Anzahl der Einzelmessungen $\left(\frac{194}{34{,}7} = 5{,}6\right)$ und auf die Quadrate der mittleren Fehler $\left(\frac{3{,}05^2}{2{,}4^2} = 1{,}6\right)$ geben wir der Gruppe III das Gewicht $5{,}6 \times 1{,}6 = 9$; wir gehen dabei von der Erwägung aus, dass sich die Gruppe I weniger gut dem Ausdruck $p + qL$ fügt als Gruppe III und zwar bei gleicher Anzahl der Einzelmessungen im Verhältnisse 2,4 : 3,05, und dass die Koeffizienten p und q um so genauer werden, je grösser die Anzahl der Messungen ist, aus denen sie hergeleitet sind. Somit bilden wir folgenden Mittelwert:

$$A = 1{,}7 + 0{,}008\ L$$

und erhalten für

L =	0	50	100	150	200	300	400	500	600	800	1000 m:
A =	1,7	2,1	2.5	2,9	3,3	4,1	4.9	5.7	6,5	8,1	9,7 mm.

b. Für den Fehlerausdruck

$$A^2 = p + qL + rL^2$$

ergab Gruppe I: $4{,}003 - 0{,}08165\ L + 0{,}0009753\ L^2$ $m = 2.8$
„ III: $2{,}722 + 0{,}03187\ L + 0{,}0000342\ L^2$ $m = 2{,}4$

Für L = 0 50 100 150 200 300 400 500 m ergibt

Gruppe I:	A =	2,0	1,54	2,36	3,83				
III:	A =	1,65	2,01	2,5	2,88			4,58	5,22

Mit Rücksicht auf die Anzahl und die mittleren Fehler kommt der Gruppe III das Gewicht 7,5 zu. Damit wird zunächst für $L = 0$, $p = 2{,}9$. Da die Gruppe I nicht über 200 m hinausgeht, so nehmen wir aus beiden Gruppen für $L = 150$ m, $A = 3{,}0$ mm, und endlich aus Gruppe III für $L = 450$ m, $A = 5{,}0$ mm und erhalten somit folgenden abgerundeten Ausdruck:

$$A^2 = 3{,}0 + 0{,}0354\ L + 0{,}00003\ L^2.$$

Dieser Wert ergibt für

L =	0	50	100	150	200	300	400	500	600	800	1000 m
A =	1,7	2,2	2,6	3,0	3,35	4,05	4,7	5,3	5,9	7,1	8,3

Vergleicht man diese Werte A mit vorstehenden aus

$$A = 1{,}7 + 0{,}008\,L,$$

so sieht man, dass sie bis L = 500 m fast völlig übereinstimmen.

c. Für Gruppe II kann man zunächst auf das Glied rL^2 verzichten, weil es sich immer nur um kurze Seiten handelt. Für $A^2 = p + qL$ fanden wir als günstigsten Wert

$$\underline{A^2 = 1{,}44 + 0{,}341\,L} \qquad [v^2] = 1{,}58.$$

Da sich die Quadratsumme $[v^2]$ in Gruppe II bis auf 0,57 herunterbringen lässt, so ist dieser Ausdruck nicht besonders gut; er passt aber immer noch erheblich besser, als die reine Quadratwurzelformel, welche $[v^2] = 1{,}90$ ergibt. — Der empirische Fehlerausdruck $A = p + qL$ passt hier gar nicht; die Summe $[v^2]$ wird 2,69; erheblich besser würde passen $A = p + qL^{1/2}$, nämlich

$$A = 0{,}6146 + 0{,}5160\sqrt{L},$$

mit $[v^2] = 1{,}34$. Bezeichnen wir letzteren Wert mit A_2, obigen ($A = \sqrt{p + qL}$) mit A_1, so erhalten wir für

L =	0	10	20	30	40	50	75	100 m
A_1 =	1,2	2,2	2,9	3,4	3,9	4,3	5,2	6,0 mm
A_2 =	0,6	2,2	2,9	3,4	3,9	4,3	5,1	5,8 mm

Auch hier sind die beiden Ausdrücke fast als identisch anzusehen.

Allgemein ist also $A^2 = p + qL + rL^2$, wofür bei kurzen Linien $A^2 = p + qL$ gesetzt werden kann. Ersterer Ausdruck lässt sich sehr genau durch $A = p + qL$, letzterer durch $A = p + q\sqrt{L}$ ersetzen.

12. **Mittlere Abweichung.** Die bisher behandelten Werte A und a sind Mittelwerte, welche man als Durchschnitts-

werte bezeichnet. Sie sind gebildet nach dem einfachen Verfahren

$$t = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 +}{n} \quad \text{. . Anzahl n.}$$

Daneben gibt es auch Mittelwerte, welche man als mittlere Abweichungen bezeichnet und welche nach der Formel

$$m = \sqrt{\frac{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 +}{n}} \quad \text{. . Anzahl n}$$

gebildet werden. Wird aus denselben Elementen der Durchschnittswert t und der mittlere Wert m gebildet, so ist natürlich m grösser als t. Das Verhältnis $\frac{m}{t}$ nähert sich mit wachsender Anzahl der Elemente einem gewissen Grenzwert, welcher nach Jordan I. 1895, Seite 443, folgenden Wert hat:

$$m = t\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1{,}2533\ t.$$

Behalten wir für die Durchschnittswerte die Bezeichnung a und A bei und bezeichnen wir die „mittleren" Werte mit a_m und A_m, so entspricht jetzt dem Durchschnittswert der Gruppen I und III

$$A^2 = 3 + 0{,}0354\,L + 0{,}00003\,L^2$$

die mittlere Abweichung

$$A_m^2 = 4{,}8 + 0{,}056\,L + 0{,}000048\,L^2.$$

Da man bei weiterer Behandlung der Vermessungsarbeiten die Mittel der beiden Messungen benutzt, so sind diese Mittel nur um die Hälfte dieses Betrages unsicher; es ist also der mittlere Fehler einer Hauptpolygonseite, so wie sie zur Rechnung benutzt wird:

$$\text{a. } M_s^2 = 1{,}2 + 0{,}014\,L + 0{,}000012\,L^2.$$

Nach der empirischen Formel war

$$A = 1{,}7 + 0{,}008\,L.$$

Diesem entspricht $A_m = 2{,}1 + 0{,}01\ L$ und

$$\text{b. } M_s = 1{,}1 + 0{,}05\ L.$$

Es ergibt sich für

	L = 0	50	100	150	200	300	400	500
a.	$M_s = 1{,}2$	1,4	1,6	1,9	2,1	2,5	2,9	3,3
b.	$M_s = 1{,}1$	1,35	1,6	1,85	2,1	2,6	3,1	3,6

Für Gruppe II war: $A^2 = 1{,}44 + 0{,}341\ L$; demnach $A_m{}^2 = 2{,}26 + 0{,}535\ L$ und $M_s{}^2 = 0{,}56 + 0{,}135\ L$.

Wie bereits erwähnt, ist die Gruppe III zwar auf dem geeignetsten Boden — durchweg auf den Fliesen des Trottoirs — gemessen; dafür sind aber die einfachsten Messgerätschaften verwendet. Es ist also mehr als wahrscheinlich, dass in jeder anderen Stadt dieselben Resultate wieder erreicht werden können, wenn die äusseren Verhältnisse annähernd dieselben sind. Um ganz sicher zu gehen, wollen wir noch etwas nach oben abrunden, auch den Quotienten $\frac{m}{t}$ etwas grösser nehmen — nämlich gleich $1{,}414 = \sqrt{2}$ statt 1,2533 und erhalten jetzt folgendes:

a. Unter sehr günstigen Verhältnissen

α. Durchschnittliche Abweichung der Doppelmessungen

$$A^2 = 4 + 0{,}04\ L + 0{,}00004\ L.$$

β. Mittlere Abweichung der Doppelmessungen

$$A_m{}^2 = 8 + 0{,}08\ L + 0{,}00008\ L^2.$$

γ. Mittlerer Fehler des Mittels, also der Polygonseiten

$$M_s{}^2 = 2 + 0{,}02\ L + 0{,}00002\ L^2.$$

Für letzteren Wert kann man mit genügender Annäherung setzen

$$M_s = 1{,}45 + 0{,}0055\ L,$$

bei kürzeren Linien auch

$$M_s = 1{,}5 + 0{,}005\ L.$$

b. Unter ungünstigen Verhältnissen. Es empfiehlt sich jedenfalls, dasselbe konstante Glied festzuhalten wie

unter a. Hiermit erhalten wir, indem wir wieder $\frac{m}{t} = \sqrt{2}$ setzen:

α. Durchschnittliche Abweichungen der Doppelmessungen

$$A^2 = 4 + 0{,}4\,L.$$

β. Mittlere Abweichungen der Doppelmessungen

$$A_m^2 = 8 + 0{,}8\,L.$$

γ. Mittlerer Fehler des Mittels, also einer Polygonseite

$$M_s^2 = 2 + 0{,}2\,L.$$

Die Formeln unter a. sind gültig bis etwa $L = 1000$ m, die unter b. bis gegen 200 m. Da auch sonst der Abstand zwischen beiden ziemlich gross ist, empfiehlt sich die Einfügung einer dritten Reihe „unter gewöhnlichen Verhältnissen", welche der Reihe a. etwas näher stehen möge als der Reihe b. und welche bis 500 m Seitenlängen gültig sein soll. — Für $L = 200$ m ergibt die Reihe a. M_s zu 2,6 mm, die Reihe b. zu 6,5 mm; für $L = 500$ m ergibt die Reihe a. $M_s = 4{,}1$ mm, die Reihe b. $M_s = 10{,}1$ mm. Für die mittlere Reihe sei demnach

für $L = 200$ m $\quad M_s = 4{,}0 - 4{,}5$ mm

$L = 500$ m $\quad M_s = 6{,}5 - 7{,}0$ mm

Hieraus finden wir mit Beibehaltung der Konstanten p:

c. Unter gewöhnlichen Verhältnissen:

α. Durchschnittliche Abweichung der Doppelmessungen

$$A^2 = 4 + 0{,}15\,L + 0{,}00002\,L^2.$$

β. Mittlere Abweichung der Doppelmessungen

$$A_m^2 = 8 + 0{,}3\,L + 0{,}00004\,L^2.$$

γ. Mittlerer Fehler des Mittels, also einer Polygonseite

$$M_s^2 = 2 + 0{,}075\,L + 0{,}00001\,L^2.$$

Da für die Berechnung und Ausgleichung der Polygonzüge der mittlere Fehler der Seitenmittel am meisten in Betracht kommt, so haben wir folgende Tabelle der mittleren

Seitenfehler (des Mittels der Doppelmessungen) zusammengestellt:

Mittlerer Fehler des Mittels einer Doppelmessung unter

	günstigen	mittleren	ungünstigen Verhältnissen
L = 0 m	1,41 mm	1,41	1,41
5 „	1,45 „	1,54	1,73
10 „	1,48 „	1,66	2,0
15 „	1,52 „	1,76	2,24
20 „	1,55 „	1,87	2,45
25 „	1,58 „	1,97	2,65
30 „	1,61 „	2,06	2,83
35 „	1,65 „	2,15	3,0
40 „	1,68 „	2,24	3,16
45 „	1,71 „	2,32	3,32
50 „	1,75 „	2,40	3,47
60 „	1,81 „	2,56	3,74
70 „	1,87 „	2,70	4,0
80 „	1,93 „	2,84	4,24
90 „	1,99 „	2,97	4,47
100 „	2,05 „	3,15	4,7
125 „	2,2 „	3,4	5,2
150 „	2,35 „	3,7	5,65
175 „	2,5 „	3,9	6,1
200 „	2,6 „	4,2	6,5
250 „	2,9 „	4,6	
300 „	3,1 „	5,05	
400 „	3,6 „	5,8	
500 „	4,1 „	6,5	(10,1)
600 „	4,6 „		
700 „	5,1 „		
800 „	5,55 „		
900 „	6,0 „		
1000 „	6,5 „	(9,3)	(14,2)

13. **Folgerungen.**

a. Es ist vielfach üblich, bei mehreren Gruppen (z. B. günstige, mittlere, ungünstige Verhältnisse) anzunehmen, dass die mittleren Fehler in einem konstanten Verhältnisse zu einander stehen. Dies ist nach Obigem nicht der Fall. Das Verhältnis günstig zu ungünstig ist für

L =	0	1 : 1
	10	1 : 1,35
	25	1 : 1,7
	50	1 : 2,0
	75	1 : 2,15
	100	1 : 2,3
	150	1 : 2,4
	200	1 : 2,5
	300	1 : 2,55
	400	1 : 2,5
	500	1 : 2,45
	600	1 : 2,4
	700	1 : 2,35
	800	1 : 2,3
	900	1 : 2,25
	1000	1 : 2,2

Für Linien über 100 m kann man zwar das Verhältnis 1 : 2,4 annehmen, ohne einen merklichen Fehler zu begehen; die weitaus meisten Längen der Gruppe III sind aber kurze Linien unter 50 m, bei denen also das Verhältnis zwischen 1 : 1 und 1 : 2 schwankt.

b. Es ist nicht gleichgültig in bezug auf den Schlussfehler, ob man eine längere Linie ganz oder in Teilen misst. Als Beispiel wählen wir zunächst eine Linie von 600 mm in günstigen Verhältnissen. Der mittlere Endfehler würde sein

bei Teilen à	20 m	$1{,}55\sqrt{30} = 8{,}5$	mm
	30 „	$1{,}61\sqrt{20} = 7{,}2$	„
	40 „	$1{,}68\sqrt{15} = 6{,}5$	„

bei Teilen à 50 m	$1{,}75\sqrt{12} = 6{,}1$	mm
60 „	$1{,}81\sqrt{10} = 5{,}7$	„
75 „	$1{,}90\sqrt{8} = 5{,}4$	„
100 „	$2{,}05\sqrt{6} = 5{,}0$	„
120 „	$2{,}17\sqrt{5} = 4{,}85$	„
150 „	$2{,}35\sqrt{4} = 4{,}7$	„
200 „	$2{,}6\sqrt{3} = 4{,}5$	„
300 „	$3{,}1\sqrt{2} = 4{,}4$	„
600 „	$4{,}6 = 4{,}6$	„

Desgleichen 120 m unter ungünstigen Verhältnissen.

In Teilen à 5 m	$1{,}73\sqrt{24} = \sqrt{72} = 8{,}5$	mm
6 „	$1{,}79\sqrt{20} = \sqrt{64} = 8{,}0$	„
8 „	$1{,}9\sqrt{15} = \sqrt{54} = 7{,}35$	„
10 „	$2{,}0\sqrt{12} = \sqrt{48} = 6{,}9$	„
12 „	$2{,}10\sqrt{10} = \sqrt{44} = 6{,}6$	„
15 „	$2{,}24\sqrt{8} = \sqrt{40} = 6{,}3$	„
20 „	$2{,}45\sqrt{6} = \sqrt{36} = 6{,}0$	„
24 „	$2{,}61\sqrt{5} = \sqrt{34} = 5{,}8$	„
30 „	$2{,}83\sqrt{4} = \sqrt{32} = 5{,}65$	„
40 „	$3{,}16\sqrt{3} = \sqrt{30} = 5{,}5$	„
60 „	$3{,}74\sqrt{2} = \sqrt{28} = 5{,}3$	„
120 „	$= \sqrt{26} = 5{,}1$	„

Aus der ersten Reihe ersieht man, dass man bei Einteilung der Linie in Teile von 200—300 m sogar noch einen geringeren Fehler zu erwarten hat, als wenn man die ganze Strecke mit einemmal misst, dass bei Einteilung der Strecke in Teile von 150—200 m derselbe Fehler zu erwarten ist, als wenn man die Linie direkt gemessen hätte, und dass sonst der Fehler wächst, je kürzer die Teilstrecken sind. Ist 600 m die Gesamtlänge eines gestreckten graden Polygonzuges, so würde obige Reihe besagen, dass man die einzelnen Seiten nicht unter 150 m, sonst aber so lang wie möglich wählen soll.

Allgemein hat eine Linie einen Schlussfehler A gemäss

$$A^2 = p + qL + rL^2 \qquad (1)$$

Denken wir uns nun die Linie in n gleiche Teile geteilt, so hat jede der Teilstrecken einen mittleren Fehler B, entsprechend

$$B^2 = p + q\frac{L}{n} + r\frac{L^2}{n^2}.$$

Setzt man L aus den einzelnen Teilstrecken zusammen, so vereinigen sich auch die mittleren Fehler nach der Formel

$$C^2 = B_1^2 + B_2^2 + \ldots = nB^2$$

$$C^2 = np + qL + \frac{rL^2}{n}. \qquad (2)$$

In (1) und (2) ist das Glied qL identisch. Es entspricht dem reinen Quadratwurzelgesetz; und wenn p und r nicht wären, so würde $C^2 = A^2$ sein. Dies würde aber bedeuten, dass es ganz gleichgültig ist, ob man eine Linie in ganzen oder in einzelnen Teilen misst, ein Satz, der in der Praxis längst als nicht richtig erkannt ist. Wir betrachten jetzt die Differenz $C^2 - A^2$, nämlich

$$d^2 = (n-1)p - rL^2\frac{(n-1)}{n} \qquad (3)$$

Diese Differenz wird zunächst Null für $n_1 = 1$, -- also wenn die Linie nicht geteilt wird, — sodann für

$$n_2 = \frac{rL^2}{p} \qquad (4)$$

Ist also kein Glied mit r vorhanden wie bei der zweiten Reihe*), so kann d überhaupt nicht zum zweiten Male gleich Null werden. In der ersten Reihe wird $n_2 = 3{,}6$. Allgemein ist für $A^2 = 2 + 0{,}02\,L + 0{,}00002\,L^2$

$$n_2 = 0{,}000010\,L^2 \qquad (5)$$

also für	$L = 100$	$n_2 = 0{,}1$
	200	0,4
	300	0,9
	400	1,6 Teile à 250 m,

*) Seite 42: $A^2 = 4 + 0{,}4\,L$ etc.

also für L = 500	$n_2 = 2{,}5$	Teile à 200 m,
600	3,6	„ à 167 „
700	4,9	„ à 143 „
800	6,4	„ à 125 „
900	8,1	„ à 111 „
1000	10,0	„ à 100 „

Ist es nun für den Schlussfehler gleich, ob man z. B. 1000 m ganz oder in 10 Teilen à 100 m misst, so muss zwischen beiden noch ein Wert liegen, wo $C^2 < A^2$, also d^2 negativ und Minimum wird. Für diesen Wert ergibt sich

$$n_3 = \frac{p + rL^2}{2p} \qquad (6)$$

oder wenn wir auf $n_2 = \frac{rL^2}{p}$ zurückgreifen:

$$n_3 = \frac{n_2 + 1}{2}. \qquad (7)$$

Für $n_2 = 0{,}00001\ L^2$ ergibt sich hieraus:

L = 100	$n_3 = 0{,}55$; günstigste Seitenlänge:	(180) m
200	0,7	(285) „
300	0,95	(315) „
400	1,3	310 „
500	1,75	285 „
600	2,3	260 „
700	2,95	240 „
800	3,7	220 „
900	4,55	200 „
1000	5,5	180 „

Aus dieser Zusammenstellung folgt, dass man für Hauptpolygonzüge die Seiten stets 200—300 m nehmen wird, sofern die Örtlichkeit dies zulässt, und dass man längere Linien über 500 m zweckmässig in einzelne Abteilungen zerlegt.

Für Messungen unter „mittleren“ Verhältnissen hatten wir die Formel aufgestellt: $M_s^2 = 2 + 0{,}075\,L + 0{,}00001\,L^2$.

Hier wird n_2 zunächst $0{,}000005\,L^2$ und es ergeben sich folgende Werte für n_2 und n_3

L =	100	n_2 = 0,05	n_3 = 0,525	
	200	0,2	0,6	
	300	0,45	0,725	
	400	0,8	0,9	
	500	1,25	1,125	
	600	1,8	1,4	à 428 m
	700	2,45	1,725	à 406 „
	800	3,2	2,1	à 381 „
	900	4,05	2,525	à 356 „
	1000	5	3	à 333 „

Unter „mittleren“ Verhältnissen empfiehlt es sich also, Polygonseiten von 300—400 m zu nehmen und Linien über 700 m zu zerlegen.

14. **Zulässige Abweichungen.** Für jede Vermessung, besonders für solche, welche auf öffentliche Kosten ausgeführt werden, ist es im höchsten Grade wichtig, von vornherein zu bestimmen, welche Abweichungen noch als zulässig gelten sollen. Hierbei ist es gleich schädlich, die Grenzen zu eng oder zu weit zu ziehen. Von vielen früheren „Amtlichen“ Fehlergrenzen ist aber nur das Eine zu sagen, dass sie ohne jedwede sachliche Begründung aufgestellt sind. — In neuerer Zeit erst hat man sich eingehender mit dem „Maximalfehler“ beschäftigt und versucht, sein Verhältnis zum mittleren Fehler zu ergründen; vielfach gilt das Dreifache des mittleren Fehlers als Maximalfehlers, z. B. bei der Anweisung IX, und dadurch, dass man Maximalfehler und zulässigen Fehler identifiziert, auch als zulässiger Fehler.

In Wirklichkeit hängen die Maximalfehler aber nicht nur von den mittleren Fehlern ab, sondern ebenso von der jedesmaligen Vermessungsanweisung. Jede Doppelmessung, deren Abweichung zu gross ausfällt, wird eben so lange

wiederholt, bis ein Paar zusammenpassender Resultate herauskommt. Es ist daher nötig, hier die Maximalfehler, die mittleren oder durchschnittlichen Fehler und die zulässigen (d. h. nach der Amtlichen Vermessungs-Anweisung zulässigen Fehler) einander gegenüberzustellen.

a. Gruppe I.

	L	M_s	a_{max}	Quotient	Amtlich zulässig
1.	16,77	1,53	9	5,9	10 mm
2.	26,76	1,59	7	4,4	13 „
3.	34,46	1,65	5	3,0	15 „
4.	39,39	1,68	4	2,4	16 „
5.	44,52	1,71	9	5,3	17 „
6.	47,99	1,74	9	5,2	18 „
7.	52,00	1,76	5	2,8	19 „
8.	55,77	1,79	7	3,9	19 „
9.	60,83	1,82	7	3,8	20 „
10.	65,37	1,84	15	8,2	21 „
11.	69,37	1,87	15	8,0	22 „
12.	74,31	1,90	5	2,6	23 „
13.	78,35	1,92	5	2,6	23 „
14.	82,49	1,95	8	4,6	24 „
15.	87,52	1,98	9	4,5	25 „
16.	93,47	2,01	7	3,5	26 „
17.	100,63	2,05	12	5,9	27 „
18.	109,49	2,11	4,5	2,1	28 „
19.	125,42	2,2	17	7,7	30 „
20.	151,71	2,4	16	6,7	34 „
				93,1	
			Durchschnitt	4,655	

Gruppe III.

	L	M_s	a_{max}	Quotient	Amtlich zulässig
1.	12,9	1,50	12	8,0	9 mm
2.	29,2	1,60	10	6,2	14 „
3.	30,5	1,61	11	6,8	14 „
4.	46,5	1,72	13	7,6	18 „
5.	60,0	1,81	10	5,5	20 „
6.	65,8	1,84	12	6,9	21 „
7.	87,2	1,98	14	7,1	25 „
8.	93,8	2,01	12	6,0	26 „
9.	116,4	2,15	13	6,0	29 „
10.	126,5	2,2	17	7,7	30 „
11.	148,4	2,35	17	7,2	33 „
12.	164,0	2,45	15	6,1	35 „
13.	185,3	2,55	13	5,1	38 „
14.	213,0	2,7	13	4,8	41 „
15.	245,9	2,9	14	4,8	45 „
16.	286,6	3,05	18	5,9	49 „
17.	342,2	3,3	17	5,2	56 „
18.	439,2	3,8	21	5,5	66 „
				112,4	
				Durchschnitt 6,25	

α. Dass der Quotient in Gruppe III grösser ist als in Gruppe I kommt davon, dass hier sechsmal mehr Einzelmessungen zu einem Mittelwert vereinigt sind als in Gruppe I.

β. Der amtlich zulässige Fehler ist einmal (Nr. 1 von Gruppe III) überschritten. Dass die amtlich zulässigen Fehler mit der Wirklichkeit nicht stimmen und zwar anfangs zu klein, bei grossen Linien viel zu gross sind, springt sofort in die Augen.

γ. Da der Quotient 8 bei Nr. 10 in Gruppe I noch überschritten ist, ohne dass die amtlich zulässige Fehlergrenze

erreicht ist, so wird als angemessene zulässige Differenz 10 M_s oder das Fünffache des mittleren Fehlers zu gelten haben*). Bei Linien über 40 m werden die zulässigen Abweichungen jetzt grösser, über 40 m kleiner, bei 1000 m nur noch die Hälfte. Dabei ist dieser neue Fehlerbetrag überaus reichlich bemessen*), so dass bei einiger Vorsicht der mit den Messungen betrauten Beamten höchstens 80 % des äusserstenfalls noch zulässigen Fehlers erreicht werden wird. Die Formel für den Fehlerausdruck lautet also:

Unter günstigen Verhältnissen darf eine Doppelmessung nicht mehr abweichen als um

$$A_{max} = \sqrt{200 + 2L + 0{,}002\,L^2}.$$

b. Gruppe II.

	L	M_s	a_{max}	Quotient	Amtlich zulässig	Quotient II
1.	4,83	1,7	15	8,8	11	6,5
2.	7,98	1,9	20	10,5	14	7,4
3.	10,39	2,0	25	12,5	16	8,0
4.	12,77	2,1	30	14,3	18	8,6
5.	15,37	2,25	35	15,6	20	8,9
6.	18,46	2,4	30	12,5	22	9,2
7.	22,51	2,55	40	15,7	24	9,4
8.	28,17	2,75	40	14,6	27	9,8
9.	37,15	3,1	30	9,7	31	10,0
10.	46,77	3,4	50	14,7	35	10,3
11.	78,78	4,2	56	13,3	46	10,9
				142,2		
			Mittel	12,95		

Zunächst ist zu bemerken, dass die grössten Abweichungen sämtlich die zulässigen Grenzen überschreiten, dass also wohl aussergewöhnlich schwierige Verhältnisse vorgelegen haben. Ein Vergleich der mittleren Fehler mit den nach der Amtlichen Vermessungsanweisung zulässigen Abweichungen ergibt

*) Das Vierfache des M. F. würde grade genügen.

die zweite Quotientenreihe, welche mit 6,5 beginnt und auf 10,9 steigt.

Da der Quotient $\frac{M_s}{a_{max}}$ durchweg über 10 hinausgeht, abgesehen vom ersten Wert, so nehmen wir hier als erlaubte Abweichung

$$A_{max} = \sqrt{200 + 25\,L.}$$

Hiermit erhalten wir folgende zulässigen Abweichungen (A_{max})

	L =	A_{max}	a_{max}	Amtlich zulässig
1.	4,83	18	15	11
2.	7,98	20	20	14
3.	10,39	21,5	25	16
4.	12,77	23	30	18
5.	15,37	24	35	20
6.	18,46	26	30	22
7.	22,51	28	40	24
8.	28,17	30	40	27
9.	37,15	34	30	31
10.	46,77	37	50	35
11.	78,78	47	56	46
	100	52		53
	150	63		67
	200	72		79
	250	80		91

Bei Linien unter 100 m sind die Werte der A_{max} grösser als die amtlich zulässigen Werte, wenn sie auch unter den grössten tatsächlichen Abweichungen bleiben, bei denen mutmasslich ein kleiner Fehler vorliegt und die von rechtswegen unzulässig sind. — Es handelt sich ja auch nur um Längen bis 100 m. Der konstante Teil des Fehlerausdrucks ist gegeben; somit bleibt die Frage, welche Abweichung auf 100 m noch durchgehen soll. Der Betrag von 5 cm wird hier

das Äusserste sein, was man zugestehen darf, da bei der Kleinvermessung alle Gegenstände auf Zentimeter genau aufgenommen werden sollen.

Es wäre nun noch eine Fehlergrenze für Messungen unter mittleren Verhältnissen festzusetzen. Hier war

$$M_s = \sqrt{2 + 0{,}075\,L + 0{,}00001\,L^2}.$$

Wir nehmen hiervon das Zehnfache und runden noch etwas ab, womit wir erhalten

$$A_{max} = \sqrt{200 + 7\,L + 0{,}002\,L^2}.$$

Bei Stadtvermessungen darf also die Abweichung zweier Messungen einer Linie folgenden Betrag nicht übersteigen:

A. Unter günstigen Verhältnissen $\sqrt{200 + 2\,L + 0{,}002\,L^2}$.

B. Unter mittleren Verhältnissen $\sqrt{200 + 7\,L + 0{,}002\,L^2}$.

C. Unter ungünstigen Verhältnissen $\sqrt{200 + 25\,L}$.

Der mittlere Fehler des Mittels beider Messungen beträgt:

A. Unter günstigen Verhältnissen $\sqrt{2 + 0{,}02\,L + 0{,}00002\,L^2}$.

B. Unter mittleren Verhältnissen $\sqrt{2 + 0{,}075\,L + 0{,}00001\,L^2}$.

C. Unter ungünstigen Verhältnissen $\sqrt{2 + 0{,}2\,L}$.

Hierbei ist angenommen, dass bei A. die Länge 1000 m, bei B. die Länge 500 m, bei C. die Länge 200 m nicht wesentlich überschritten wird. In der Regel wird man mit A. und C. oder mit B. und C. auskommen. Will man A., B. und C. gleichzeitig neben einander gebrauchen, so ist aus formellen Gründen zu empfehlen, den Koeffizienten von L^2 bei B. ebenso gross wie bei A. zu nehmen, weil sonst der Fall eintreten kann, dass für ein sehr grosses L (z. B. 10 km) sich für A. ein grösserer Fehler ergeben würde, als für B. Der mittlere Fehler des Mittels einer Doppelmessung würde dann also anzunehmen sein unter „mittleren" Verhältnissen zu

$$\sqrt{2 + 0{,}07\,L + 0{,}00002\,L^2}.$$

Der Unterschied wird für Längen unter 500 m nur ganz unwesentlich.

Überhaupt ist in dem Ausdruck $A^2 = p + qL + rL^2$ der letzte Teil, rL^2, für praktische Zwecke der Stadtvermessungen der unwesentliche, da grössere Linien als 1000 m wohl schwerlich vorkommen werden oder überhaupt möglich sind.

Mit anderen Worten: Nachdem sich das Quadratwurzelgesetz $A^2 = qL$ als unzutreffend erwiesen hat, erfordern die Zwecke der Stadtvermessung in erster Linie die Hinzufügung der Konstanten p und erst in zweiter Linie die des Gliedes rL^2. Und da sich p wesentlich gleich ergeben hat, so muss man für jede Gruppe eine besondere Fehlerformel aufstellen und kann nicht etwa annehmen, dass die Fehler der einen Gruppe ein Vielfaches derjenigen einer anderen Gruppe sind (wie es z. B. Jordan empfiehlt, Band II, 1897, Seite 59, und wie es die Preussische Vermessungs-Anweisung IX tut).

Kann man beim Beginn einer Stadtvermessung schon übersehen, dass man keine Linien über 500 m erhalten wird, so kann man sich auf einen Ausdruck von der Form $A^2 = p + qL$ beschränken; so gibt z. B. $\sqrt{1{,}75 + 0{,}03\,L}$ fast dieselben Werte A, wie $\sqrt{2 + 0{,}02\,L + 0{,}00002\,L^2}$, innerhalb gewisser Grenzen.

Sieht man von den Bruchteilen ab, so beträgt der mittlere Fehler des Mittels — unter günstigen Bedingungen bei 15 m $\pm$ 2 mm und bei 175 m auch noch dasselbe. Das bedeutet, dass man bei Polygonberechnungen vielfach alle Seiten als gleich genau ansehen kann (in Bremen durchweg, da Längen über 175 m kaum vorkommen)*). Weiter folgt aus diesem Umstande, dass der Gesamtfehler eines gestreckten Polygonzuges in erster Linie von der Zahl der Seiten abhängt, und dass man daher die Seiten möglichst gross zu nehmen hat. Das Nähere hierüber haben wir bereits S. 44 bis 48 erörtert.

*) d. h. Alt- und Neustadt.

II. Genauigkeit der Winkelmessungen.

15. **Die verschiedenen Fehlerquellen der Winkelfehler.** Zur Winkelmessung der Hauptpolygonzüge sind drei verschiedene Instrumente verwandt, deren Kreisdurchmesser etwa 12,5, 15 und 16,5 cm beträgt. Auch die Nonienangabe ist verschieden (30", 20", 10"), ebenso die Vergrösserung (etwa 20fach, 25fach, 30fach). Das kleinere Instrument ist ausschliesslich in der Neustadt verwandt, die beiden andern vorzugsweise in der Altstadt. Nimmt man an, dass die Leistungsfähigkeit der Instrumente ihrem Durchmesser proportional ist, so würde man von den drei Instrumenten Resultate zu erwarten haben, welche sich wie $^1/_{16,5}$, $^1/_{15}$, $^1/_{12,5}$ und Fehler, welche sich wie

16,5 : 15 : 12,5

oder wie 13,2 : 12 : 10

verhalten, oder Neustadt zu Altstadt wie 13,2 : 11 oder wie 12 : 10. Dies ist natürlich nur eine ganz rohe Schätzung.

Die Genauigkeit der Winkelmessungen „auf der Station", also ohne Rücksicht auf sonstige Nebenumstände, ergab sich in der Altstadt aus einer grösseren Reihe von Winkelmessungen zu etwa ± 8" (mittlerer Winkelfehler). Dabei handelt es sich um Mittel aus dreifacher Messung. Da die Winkel in der Neustadt ebenfalls dreifach gemessen sind, so sind dort also rund ± 10" m. W. F. zu vermuten, im Mittel in Altstadt und Neustadt ± 9". — Nach der Bremischen Vermessungs-Anweisung beträgt der höchstens zulässige Fehler ± 27", woraus auf einen a priori angenommenen mittleren Fehler von ebenfalls 9" zu schliessen ist, da der dreifache mittlere Fehler als höchstens zulässiger Fehler angesetzt zu werden pflegt. — Die zulässige Differenz ist übrigens dreimal in 115 Fällen, zweimal in der Neustadt, einmal in der Altstadt, um eine Kleinigkeit überschritten.

Nun hat ein Polygonzug in Bremen 4,5 Winkel (im Durchschnitt), somit würde ein mittlerer Abschlussfehler von $9\sqrt{4{,}5} =$ rund 19" zu erwarten sein.

Nun beträgt aber der Endwiderspruch der 115 Hauptpolygonzüge im Durchschnitt (t) 24" (Altstadt 21", Neustadt 27", Verhältnis 10 : 13), und dies entspricht einem mittleren Abschlussfehler (m = 1,25 t) von 30" (Altstadt 26", Neustadt 34"), einem Fehler, der also um 50 % höher ist, als nach dem Winkelfehler auf der Station zu erwarten stand. Da das mutmassliche Verhältnis (10 : 12) sich auch am Schluss wieder zeigt (10 : 13), so ist auf gleichmässig wirkende weitere Fehlerquellen zu schliessen.

Als erste Fehlerquelle ist die Exzentrizität des Instruments und der Signale anzusehen. Wenn auch auf diesen Gegenstand besondere Sorgfalt verwandt ist, so ist es doch wohl kaum möglich gewesen, den Fehler unter 1 mm für jede Aufstellung zu bringen. Da die Polygonseiten im Mittel $\frac{280}{3{,}5} = 80$ m lang sind, so beträgt die Unsicherheit eines Winkelschenkels

$\frac{\pm\sqrt{2}}{80000} = \pm 3^1/_2$", diejenige eines Winkels $\frac{\pm 2}{80000} = \pm 5$".

Bei kürzeren Seiten wächst dieser Fehler natürlich sehr schnell.

Als weitere Fehlerursache ist die anzunehmen, dass schon die gegebenen Anschlussstrahlen nicht fehlerfrei sind. Wir wissen (S. 4), dass die trigonometrischen Richtungen niedrigster Ordnung um ca. 6" unsicher sind. Solche Züge aber, welche unmittelbar von einem trigonometrischen Festpunkt zu einem andern laufen, gibt es nur drei; etwa 30 Züge haben einseitigen Anschluss und die grosse Mehrzahl, etwa 80 Züge, hängt mit dem trigonometrischen Netz überhaupt

nicht mehr direkt zusammen. Wir können daher die Züge in 5 Klassen teilen:

I. Beiderseits Anschluss an das trigonometrische Netz.
II. Nur einseitiger Anschluss und Anschluss an Kl. I.
III. Beiderseits Anchluss an I.
IV. Anschluss an I und II.
V. Beiderseits Anschluss an III.

16. **Schlussfehler der verschiedenen Klassen.** Die vorstehend aufgeführten Klassen lassen sich nicht streng gegen einander abgrenzen; wir wollen aber vorläufig die ziemlich zutreffende Annahme machen, dass ein in jedem Sinne „durchschnittlicher" Zug in Klasse III fällt. Ein solcher Zug ist 280 m lang, seine Seiten sind 80 m lang, er hat 3,5 Seiten und 4,5 Winkel und einen mittleren Abschlussfehler von ± 30". Bei gleicher Genauigkeit hat jeder Winkel einen mittleren Fehler von $\frac{30}{\sqrt{4{,}5}} = 14{,}14''$. Bildet man — nach Verteilung des Abschlussfehlers auf die einzelnen Winkel — durch allmähliche Addition der verbesserten Winkel zum gegebenen Anfangsazimut die Azimute der einzelnen Winkel, so muss am Schluss das gegebene Endazimut ohne „Widerspruch" erscheinen. Es ist nun klar, dass das erste und letzte Azimut am genauesten sind, dass dann das zweite und vorletzte folgen, und dass das mittelste am wenigsten genau ist. Nun ist nach Jordan II. 1897 S. 403 der mittlere Fehler eines ausgeglichenen Azimuts α

$$m_\alpha = m\sqrt{\frac{r(n-r)}{n}} = \sqrt{\frac{rm^2 \cdot (n-r) \cdot m^2}{n \cdot m^2}},$$

wo m den mittleren Fehler eines Winkels, n die Anzahl aller Winkel und r die Nummer der Seite bedeutet. Nun ist

$$m = \sqrt{\frac{900}{4{,}5}} = \sqrt{200};$$

also für einen Zug von 4 Winkeln (drei Seiten):

$m\alpha_1$	$m\alpha_2$	$m\alpha_3$
$\sqrt{\frac{200 \cdot 600}{800}}$	$\sqrt{\frac{400 \cdot 400}{800}}$	$\sqrt{\frac{600 \cdot 200}{800}}$
oder $\sqrt{150}$	$\sqrt{200}$	$\sqrt{150}$
oder $\pm 12''{,}25$	$\pm 14''{,}14$	$\pm 12''{,}15$

und für einen Zug von 5 Winkeln (vier Seiten):

$m\alpha_1$	$m\alpha_2$	$m\alpha_3$	$m\alpha_4$
$\sqrt{\frac{200 \cdot 800}{1000}}$	$\sqrt{\frac{400 \cdot 600}{1000}}$	$\sqrt{\frac{600 \cdot 400}{1000}}$	$\sqrt{\frac{600 \cdot 200}{1000}}$
oder $\sqrt{160}$	$\sqrt{240}$	$\sqrt{240}$	$\sqrt{160}$
oder $\pm 12''{,}65$	$\pm 15''{,}50$	$\pm 15''{,}50$	$\pm 12''{,}65$

Für einen Zug von 4,5 Winkeln kann man also den mittleren Fehler des Azimuts der mittleren Seite annehmen zu $\frac{14{,}1 + 15{,}5}{2} = 14''{,}8$.

Nun denken wir uns zwischen zwei solcher Seiten wiederum einen Zug von 4,5 Winkeln eingeschaltet. Dieser Zug hat also folgende Fehler:

$2 \times 14{,}8^2 = 2 \times 220 = 440$ (Anschlussfehler)
$4{,}5 \times 9^2 = 4{,}5 \times 81 = 365$ (Winkelfehler auf der Stat.)
$4{,}5 \times 5^2 = 4{,}5 \times 25 = 113$ (Exzentrizitätsfehler)
918

$\sqrt{\quad} = \pm 30''{,}3$

Nach unserer Definition würde ein solcher Zug in die V. Klasse gehören, während schon den Zügen der III. Klasse ein Abschlussfehler von 30'' zukommt. Dies lässt darauf schliessen, dass den Winkeln ein grösserer Fehler auf der Station innewohnt als 9'', und zwar ergibt sich $\pm 10''{,}5$. — Hiermit berechnen sich die mittleren Abschlussfehler wie folgt:

I. Klasse. Wir nehmen für die trigonometrischen Richtungen einen m. F. von 6'' an, aber keine Exzentrizitätsfehler.

Somit haben wir bei vier Winkeln:

2 äussere Winkel à $6^2 + 10{,}5^2 + 3{,}5^2 = 2 \times 160 = 320$
2 innere Winkel à $10{,}5^2 + 5^2 \quad = 2 \times 135 = 270$
590
$\sqrt{=} \pm 24{,}3$

Ein Zug, welcher denselben Abschlussfehler hat, dessen Winkel aber gleich genau sind, hat nach obiger Formel folgende Azimutfehler:

$$\sqrt{\frac{147{,}5 \times 442{,}5}{590}} = 10{,}''5; \quad \sqrt{\frac{295 \times 295}{490}} = 12{,}''15; \quad \sqrt{\frac{442{,}5 \times 147{,}5}{590}} = 10{,}''5.$$

In entsprechender Weise bilden wir für unsern Zug:

$$\sqrt{\frac{160 \times 430}{590}} = 10{,}''8; \quad \sqrt{\frac{295 \times 295}{590}} = 12{,}''15; \quad \sqrt{\frac{430 \times 160}{590}} = 10{,}''8.$$

Für 5 Winkel erhalten einen Abschlussfehler von

$$\sqrt{2 \times (6^2 + 10{,}5^2 + 3{,}5^2) + 3 \times (10{,}5^2 + 5^2)} = \sqrt{320 + 405} = \sqrt{725} = \pm 26{,}9.$$

Die Azimutfehler werden:

$$\sqrt{\frac{160 \times 565}{725}} = 11{,}''2; \quad \sqrt{\frac{295 \times 430}{725}} = 13{,}''2; \quad 13{,}''2; \quad 11{,}''2.$$

Für unsern Durchschnittszug haben wir also: Abschlussfehler 25,''6; Azimutfehler der innern Seiten 12,''7.

III. Klasse. Beiderseits Anschluss an Klasse I.

Die m. F. der Anschlusswinkel betragen

$$\sqrt{12{,}7^2 + 10{,}5^2 + 5{,}0^2} = \sqrt{295}.$$

Die m. F. der inneren Winkel

$$\sqrt{10{,}5^2 + 5{,}0^2} = \sqrt{135}.$$

Ein Zug von 4 Winkeln hat den Gesamtfehler

$$\sqrt{295 + 135 + 135 + 295} = \sqrt{860} = \pm 29{,}''3$$

und die mittleren Azimutfehler

$$\sqrt{\frac{295 \cdot 565}{860}} = 13{,}''9; \quad \sqrt{\frac{430 \cdot 430}{860}} = 14{,}''7.$$

Ein Zug von 5 Winkeln hat dagegen den Gesamtfehler

$$\sqrt{295 + 135 + 135 + 135 + 295} = \sqrt{995} = 31,''55$$

und die mittleren Azimutfehler

$$\sqrt{\frac{295 \cdot 700}{995}} = 14,''4;\ 15,''6;\ 15,''6;\ 14,''4.$$

Für unsern Durchschnittszug von 4,5 Winkeln haben wir also Abschlussfehler $\pm 30,''4$ (statt 30"), Azimutfehler der inneren Seite $\pm 15,''15$. Unsere Annahme von $\pm 10,''5$ für den Winkelfehler auf der Station war also zutreffend.

V. Klasse. Beiderseits Anschluss an Klasse III.

Die mittleren Fehler der Anschlusswinkel werden hier

$$\sqrt{15,15^2 + 10,5^2 + 5,0^2} = \sqrt{365}.$$

Ein Zug von 4 Winkeln ergibt einen Abschlussfehler von $\sqrt{1000} = 31,''6$ und Azimutfehler $\pm 15,''2;\ 15,''8;\ 15,''2$.

Ein Zug von 5 Winkeln ergibt einen Abschlussfehler von $\sqrt{1135} = 33,''7$ und die Azimutfehler $15,''7;\ 16,''7;\ 16,''7;\ 15,''7$.

Für einen Zug von 4,5 Winkeln erhalten wir also Abschlussfehler $32,''65$; Azimutfehler der inneren Seite $16,''3$.

II. Klasse. Anschluss an das trigonometrische Netz und an Klasse I.

Abschlussfehler für 4 Winkel

$$\sqrt{160 + 135 + 135 + 295} = \sqrt{725} = \pm 26,''9.$$

Azimutfehler $\pm 11,''2;\ \pm 13,''2;\ \pm 13,''2$.

Abschlussfehler für 5 Winkel

$$\sqrt{725 + 135} = \sqrt{860} = \pm 29,''3.$$

Azimutfehler $\pm 11,''4;\ \pm 13,''9;\ \pm 14,''7;\ \pm 13,''9$.

Für einen Zug von 4,5 Winkeln: Abschlussfehler $\pm 28,''1$, Azimutfehler der mittleren Seite $\pm 13,''8$.

IV. Klasse. Hier können wir die Mittel von Klasse III und Klasse V nehmen; also Abschlussfehler $\pm 31,''5$, Azimutfehler der Innenseite $\pm 15,''7$.

Für einen Zug von 4,5 Winkeln wachsen also wegen der Anschlussfehler die Endfehler und die Azimutfehler in folgender Weise:

Azimutfehler im trigonometrischen Netz $\pm 6''$.

	Abschlussfehler	Azimutfehler der Innenseite
Klasse I	$\pm 25,''6$	$\pm 12,''6$
„ II	$\pm 28,1$	$\pm 13,8$
„ III	$\pm 30,4$	$\pm 15,2$
„ IV	$\pm 31,5$	$\pm 15,7$
„ V	$\pm 32,6$	$\pm 16,3$

17. **Schlussfehler für normale Seitenlänge von 80 m.** Auf Grund der im vorigen Paragraphen berechneten Anschlussfehler muss ein Zug von n-Winkeln folgende Abschlussfehler ergeben:

Klasse I $\sqrt{320 + (n-2)\,135}$

„ III $\sqrt{590 + (n-2)\,135}$

„ V $\sqrt{730 + (n-2)\,135}$ etc.

Hiernach ist folgende Tabelle berechnet:

	Abschlussfehler				
Anzahl der Winkel Klasse	I	II	III	IV	V
3	21″	24″	27″	28″	29″
4	24″	27″	29″	30″	32″
5	27″	29″	32″	33″	34″
6	29″	32″	34″	35″	36″
7	32″	34″	36″	37″	37″
8	34″	36″	37″	38″	39″
9	36″	37″	39″	40″	41″
10	37″	39″	41″	42″	43″

18. **Einfluss der Exzentrizitätsfehler bei verschiedener Länge der Schenkel.** Bei 80 m Schenkellänge macht eine

Unsicherheit in der Aufstellung des Instruments und der Signale von ± 1 mm einen Fehler von 5" pro Winkel und von 3,"53 pro Schenkel. Diese Fehler nehmen mit der Schenkellänge ab und umgekehrt. Der wirkliche Fehler eines Winkels setzt sich also aus dem Exzentrizitätsfehler ε und dem Messungsfehler auf der Station δ zusammen nach der Formel $f = \sqrt{\delta^2 + \varepsilon^2}$.

Hiernach ist folgende Tabelle entworfen:

Schenkellänge	Exzentrizitätsfehler a des Winkels	Exzentrizitätsfehler b eines Schenkels	Gesamtfehler ($\delta = \pm 10,"5$) a	Gesamtfehler ($\delta = \pm 10,"5$) b
20 m	20"	14,14	22,"6	17,6
30 „	13,33	9,43	17,0	14,1
40 „	10,0	7,07	14,5	12,6
50 „	8,0	5,66	13,2	11,9
60 „	6,67	4,72	12,5	11,5
70 „	5,72	4,04	12,0	11,3
80 „	5,0	3,54	11,6	11,1
90 „	4,44	3,15	11,4	11,0
100 „	4,0	2,83	11,2	10,9
110 „	3,64	2,57	11,1	10,8
120 „	3,33	2,36	11,0	10,8
130 „	3,08	2,17	10,9	10,7
140 „	2,86	2,02	10,9	10,7
150 „	2,67	1,89	10,8	10,7
200 „	2,0	1,41	10,7	10,6
250 „	1,6	1,13	10,6	10,6
300 „	1,33	0,94	10,6	10,5
400 „	1,0	0,71	10,5	10,5
500 „	0,8	0,57	10,5	10,5

Die Reihen b kommen in Anwendung bei Anschluss an trigonometrische Punkte, welche als frei von Exzentrizitätsfehlern angenommen werden müssen.

19. **Schlussfehler für verschiedene Schenkellängen.**

a. Schenkellänge 40 m (M.W. F. $\pm$ 14,5 bezw. $\pm$ 12,6)

Klasse I, 4 Winkel:

Schlussfehler $\sqrt{2 \times 6^2 + 2 \times 12{,}6^2 + 2 \times 14{,}5^2} = \sqrt{810} = 28''{,}5$

Klasse I, 5 Winkel:

Schlussfehler $\sqrt{2 \times 195 + 3 \times 210} = \sqrt{1020} = 31{,}9$

Also für 4,5 Winkel: Endfehler $\pm$ 30″,2.

Azimutfehler: 4 Winkel $\pm$ 12″,2 $\pm$ 14″,2 $\pm$ 12″,2

5 Winkel $\pm$ 12,6 $\pm$ 15,6 $\pm$ 15,6 $\pm$ 12,6.

Für 4,5 Winkel: Azimutfehler der Innenseite $\pm$ 14″,9.

Klasse III. 4 Winkel:

Schlussfehler $\sqrt{420 + 210 + 210 + 420} = \sqrt{1260} = 35{,}5.$

5 Winkel:

Schlussfehler $\sqrt{1470} = 38{,}3.$

Also für 4,5 Winkel: Endfehler $\pm$ 36″,9.

Azimutfehler: 4 Winkel $\pm$ 16″,7 $\pm$ 17,75 $\pm$ 16,7.

5 Winkel $\pm$ 17,3 $\pm$ 19,0 $\pm$ 19,0 $\pm$ 17,3.

Für 4,5 Winkel: Azimutfehler der Innenseite $\pm$ 18″,4.

Klasse V. 4 Winkel:

Schlussfehler $\sqrt{550 + 2 \times 210 + 550} = \sqrt{1520} = \pm 39''{,}0.$

5 Winkel:

Schlussfehler $\sqrt{550 + 3 \times 210 + 550} = \sqrt{1730} = \pm 41''{,}6.$

Für 4,5 Winkel: Schlussfehler $\pm$ 40″,8.

Azimutfehler: 4 Winkel $\pm$ 18″,7 $\pm$ 19″,5 $\pm$ 18,7.

5 Winkel $\pm$ 19,4 $\pm$ 20,7 $\pm$ 20,7 $\pm$ 19,4.

Für 4,5 Winkel: Azimutfehler der Innenseite: 20″,1.

Der Schlussfehler beträgt

	für 40 m	für 80 m Schenkellänge
Klasse I	30″,2	25″,6
„ III	36,9	30,4
„ V	40,3	32,6
	107,4	88,6
Im Durchschnitt	35,8	29,5

also mehr 21 %.

b. Schenkellänge 60 m (M. W. F. 12,5 bezw. 11,5)

Klasse I. 4 Winkel: $\sqrt{170 + 2 \cdot 155 + 170} = \sqrt{650} = 25,5$

5 Winkel: $\sqrt{805} = 28,3$

Für 4,5 Winkel: Schlussfehler $\pm 26,9$.

Azimutfehler: 4 Winkel $\pm 11,2$ $\pm 12,75$ $\pm 11,2$

5 Winkel $\pm 11,6$ $\pm 13,9$ $\pm 13,9$ $\pm 11,6$.

Für 4,5 Winkel: Azimutfehler der Innenseite $\pm 13,3$.

Klasse III. 4 Winkel:

Schlussfehler $\sqrt{330 + 2 \cdot 155 + 330} = \sqrt{970} = 31,15$.

5 Winkel:

Schlussfehler $\sqrt{1125} = 33,55$.

Für 4,5 Winkel: Schlussfehler $\pm 32,6$.

Azimutfehler: 4 Winkel $\pm 14,8$ $\pm 15,6$ $\pm 14,8$

5 Winkel $\pm 15,3$ $\pm 16,6$ $\pm 16,6$ $\pm 15,3$.

Für 4,5 Winkel: Azimutfehler der Innenseite $+ 16,1$.

Klasse V. 4 Winkel:

Schlussfehler $\sqrt{415 + 2 \cdot 155 + 415} = \sqrt{1140} = 33,8$.

5 Winkel:

Schlussfehler $\sqrt{415 + 3 \cdot 155 + 415} = \sqrt{1295} = 36,0$.

Für 4,5 Winkel: Schlussfehler $\pm 34,9$.

Azimutfehler: 4 Winkel $\pm 16,2$ $\pm 16,9$ $\pm 16,2$.

5 Winkel $\pm 16,8$ $\pm 17,9$ $\pm 17,9$ $\pm 16,8$.

Für 4,5 Winkel: Azimutfehler der Innenseite $\pm 17,4$.

Der Schlussfehler beträgt

	für 60 m	für 80 m Schenkellänge
Klasse I	26,9	25,6
„ III	32,6	30,4
„ V	34,9	32,6
	94,4	88,6
Im Durchschnitt	31,5	29,5

also mehr ca. 7 %.

c. Schenkellänge 120 m (M. W. F. 11,″0 bezw. 10,″8).
Auf dieselbe Weise ergibt sich für 4,5 Winkel:

Klasse I	Schlussfehler	24,″6	(für	80 m	25,6)	M. A. F.	12,″2
„ III	„	29,0	(„	80 „	30,4)	„	14,4
„ V	„	31,0	(„	80 „	32,6)	„	15,4
		84,6			88,6		
Durchschnitt		28,2			29,5		

also weniger 4,5 %.

Interpoliert man hier einige Zwischenwerte, so kann man die Tabelle der Schlussfehler in § 17, S. 61, welche für 80 m Seitenlänge gilt, auf jede andere Länge übertragen. Die Korrektion beträgt für eine Seitenlänge von

40 m	+ 21 %
50 „	+ 13 %
60 „	+ 7 %
70 „	+ 3 %
80 „	0
90 „	— 2 %
100 „	— 3 %
110 „	— 4 %
120 „	— 4,5%
150 „	— 5 %

20. **Zulässige Schlussfehler.** Um für die Tabelle § 17 eine bequeme Näherungsformel zu finden, setzen wir zuerst den Schlussfehler $F = \beta \sqrt{n}$ und nehmen für β den Wert, welcher sich für $n = 4{,}5$ ergibt. Hiermit erhalten wir:

	n =	3	4	5	6	7	8	9	10	
Klasse I	a.	21	24	27	29	32	34	36	37″:	nach § 17.
	b.	21	24	27	30	32	34	36	38 = 12,05 $\sqrt{n}$.	
Klasse III	a.	27	29	32	34	36	37	39	41 :	nach § 17.
	b.	25	29	32	35	38	41	43	45 = 14,35 $\sqrt{n}$.	
Klasse V	a.	29	32	34	36	37	39	41	43 :	nach § 17.
	b.	27	31	34	38	41	44	46	49 = 15,4 $\sqrt{n}$.	

Setzen wir dagegen:

$$\left.\begin{array}{lll} F = 15 + 2{,}3\,n & \text{Klasse} & \text{I} \\ 21 + 2{,}0\,n & \text{„} & \text{III} \\ 24 + 1{,}9\,n & \text{„} & \text{V} \end{array}\right\} \quad (1)$$

so erhalten wir:

	n =	3	4	5	6	7	8	9	10	
Klasse I	a.	21	24	27	29	32	34	36	37	: nach § 17.
	b.	22	24	26,5	29	31	33	36	38	
Klasse III	a.	27	29	32	34	36	37	39	41	: nach § 17.
	b.	27	29	31	33	35	37	39	41	
Klasse V	a.	29	32	34	36	37	39	41	43	: nach § 17.
	b.	30	32	33,5	35	37	39	41	43	

Ausser bei Klasse I ist die Übereinstimmung mit dem Quadratwurzelgesetz nicht gut; Klasse III und V stimmen viel besser mit einer empirischen Formel $F = \alpha + \beta n$. Man könnte hier sogar daran denken, letztere Formeln mit konstantem Faktor von n zu nehmen, etwa

$$\left.\begin{array}{lll} F = 16 + 2{,}1\,n & \text{Klasse} & \text{I} \\ 21 + 2{,}1\,n & \text{„} & \text{III} \\ 23 + 2{,}1\,n & \text{„} & \text{V} \end{array}\right\} \quad (2)$$

Hierin sieht man deutlich den Einfluss des Anschlussfehlers. Ist der Maximalfehler gleich dem dreifachen des mittleren Fehlers, so ist hieraus zu schliessen, dass der Endfehler eines Zuges in Klasse III um ca. 15", in Klasse V um ca. 20" grösser sein kann als in Klasse I, ohne dass irgend ein Verschulden oder eine Nachlässigkeit vorliegt.

Nachstehend sind einige Züge zusammengestellt, welche einen grösseren Abschlussfehler zeigen und zwar von mehr als 80 % des erlaubten Fehlers.

	Altstadt	Nr.	Klasse	Zahl der Winkel	Mittlere Seitenlänge	Endfehler	Erlaubt	M. F.	Endfehler / M. F.
1	„	1	II	4	80 m	44″	54″	27″	1,6
2	„	32	III	3	130 m	52	47	26	2,0
3	„	43	III	3	75 m	45	47	28	1,6
4	„	79	III	4	75 m	48	54	30	1,6
5	„	84	V	3	80 m	45	47	29	1,6
6	„	89	II	3	95 m	42	47	23	1,8
7	Neustadt	1	II	4	115 m	52	54	26	2,0
8	„	2	II	4	140 m	56	54	26	2,2
9	„	5	II	4	100 m	47	54	26	1,8
10	„	6	II	5	130 m	51	60	28	1,8
11	„	10	IV	4	120 m	47	54	29	1,6
12	„	13	II	5	100 m	68	60	28	2,4
13	„	18	II	4	67 m	47	54	28	1,7
14	„	30	IV	4	86 m	46	54	30	1,5
15	„	34	V	5	105 m	51	60	33	1,5
16	„	35	III	5	105 m	50	60	31	1,6
17	„	40	III	7	120 m	61	71	33	1,8

Die erlaubte Differenz ist dreimal überschritten. Nun kann man aber sofort Nr. 2 — Altstadt, Zug 32 — ausscheiden, denn der Zug ist nicht fehlerhafter als Nr. 7 — Neustadt, Zug Nr. 1 —, welcher ebenfalls mit $\pm 26''$ m. F. anzusetzen ist. Der Endfehler übersteigt also nur in zwei Fällen das Doppelte des mittleren Fehlers. Sollen diese beiden Züge noch als zulässig gelten, so muss man als erlaubte Differenz das $2^1/_2$fache des mittleren Fehlers zulassen.

In der Regel genügt hier eine Quadratwurzelformel. Soll der Zug 32 — Altstadt — noch zulässig sein, so muss man die Fehlergrenze von $27\sqrt{n}$ auf $\mathbf{30}\sqrt{n}$ erhöhen. Hiermit fällt auch Nr. 8 — Neustadt, Zug Nr. 2 — aus, denn die zulässige Abweichung wird jetzt 60″; nur bei Nr. 12 — Neustadt, Zug 13 — wird sie 67″. Soll der zulässige Fehler das Dreifache des

mittleren Fehlers auf der Station sein, was man in der Regel annimmt, so hätte ohnehin die Fehlergrenze erhöht werden müssen und zwar auf 31″,5, da sich der Fehler von ± 9″ als zu klein erwiesen hat und auf 10″,5 erhöht werden musste, um die wirklichen Abschlussfehler zu erklären (Seite 58, § 16).

Will man die Klassen berücksichtigen, so kann man als erlaubt annehmen:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{Klasse I} & 36'' + 5\,n'' \\ \text{„ II} & 42'' + 5\,n'' \\ \text{„ III} & 47'' + 5\,n'' \\ \text{„ IV} & 51'' + 5\,n'' \\ \text{„ V} & 54'' + 5\,n'' \end{array}\right\} \quad (3)$$

Man würde erhalten für:

Nr. 2 $47 + 15 = 62''$; Abzug 3″, also erlaubt 59″ gegen 52″.
„ 8 $42 + 20 = 62''$; „ 3″, „ 59″ „ 56″.
„ 13 $42 + 25 = 67''$; „ 2″, „ 65″ „ 68″.

Auch hier würde Nr. 13 noch nicht zulässig sein. Der Abzug (wegen der längeren Seiten) ist insofern berechtigt, als im umgekehrten Falle jedenfalls ein Zuschlag gemacht worden wäre.

Im allgemeinen wird es sich aber empfehlen, hier einen möglichst einfachen Fehlerausdruck, etwa $30\sqrt{n}$, oder vorstehende Werte mit $4\,n$ — und in beiden Fällen ohne Rücksicht auf weitere Nebenumstände, zu wählen. Erst wenn diese Abweichung überschritten ist, wird man zu prüfen haben, ob eine nochmalige Messung wirklich nötig ist. Hierbei ist nicht zu vergessen, dass nur 16 von 116 Zügen einen grösseren Abschlussfehler zeigen, so dass also höchstens bei jedem sechsten oder siebenten Zuge der Fehler der Grenze nahekommen wird; die Frage einer Nachmessung wird aber unter 100 Fällen nicht mehr als 2- oder 3mal aufgeworfen werden dürfen, wenn die Arbeiten mit der nötigen Sorgfalt ausgeführt sind. Andererseits ist nicht zu vergessen, dass nach (3) derjenige, welcher die Winkelmessungen

ausgeführt hat, auf einen Winkelfehler unter 30" wenig Einfluss hat.

21. **Ergebnisse der Stadtvermessung Hannover-Linden.** Aus vorstehenden Betrachtungen ergibt sich, dass es wenig besagt, wenn man den mittleren Winkelfehler einer Polygonisierung weiss. Weitergehende Veröffentlichungen und Untersuchungen sind bis jetzt nicht bekannt geworden, ausser Hamburg — worauf wir noch zurückkommen werden — und Hannover-Linden. Die Vermessung letzterer beiden Städte ist unter Leitung des Prof. Dr. Jordan ausgeführt. Wir entnehmen nun Jordan II, 1897, Seite 401, folgende Angaben:

Linden: 14 Züge mit 88 Winkeln u. 456" Abschlussfehl. $[w^2] = 18718$.
Hannover: 19 „ „ 114 „ „ 344" „ $[w^2] = 10210$.
zusammen 33 Züge mit 202 Winkeln u. 800" Abschlussfehl. $[w^2] = 28928$.

Dies ergibt im Durchschnitt:

Linden: 1 Zug à 6,3 Winkel und 32",6 Abschlussfehler. $\frac{[w^2]}{n} = 1337$.

Hannover: 1 „ à 6,0 „ „ 18",1 „ $\frac{[w^2]}{n} = 537$.

Im ganzen: 1 „ à 6,1 „ „ 24",2 „ $\frac{[w^2]}{n} = 875$.

Jordan bezeichnet mit „w" den Abschlussfehler der einzelnen Züge; somit ist

$$\sqrt{\frac{[w^2]}{n}} \text{ der „mittlere" Abchlussfehler} = 29",6.$$

Weiter erfahren wir daselbst, dass dies Züge zwischen zwei trigonometrischen Festpunkten (also nach unserer Einteilung Kl. I) sind, und dass die Seitenlänge im Mittel 140 m beträgt.

In Bremen beträgt nach § 17, Seite 61, der mittlere Abschlussfehler eines Zuges von 6,1 Seiten und 80 m Seitenlänge in Klasse I etwas mehr als 29"; für 140 m Seitenlänge kommen nach § 19, Seite 65, 5 % in Abzug, bleiben also 28" gegen 29",6 in Hannover.

Man könnte auch noch Bremen-Altstadt mit Hannover vergleichen. Nach § 15, Seite 56, hatten wir für den durchschnittlichen Fehler t: Altstadt 21", Neustadt 27", Gesamtdurchschnitt 24". Demgemäss ist der Abschlussfehler eines Zuges in Klasse I der Altstadt anzunehmen mit 26" für 80 m Seitenlänge und mit 25" für 140 m Seitenlänge. In Hannover ergibt sich $\sqrt{537} = 23,''2$, also etwas weniger. — Aus beiden Vermessungen zusammen (Hannover und Bremen-Altstadt) ist zu schliessen, dass es selbst bei erlangter Übung (Hannover kommt nach Linden, Bremen Altstadt nach Neustadt) und unter günstigsten Anschlussverhältnissen, sowie bei verhältnismässig grosser Seitenlänge (gegen 150 m) nicht möglich ist, einen kleineren Polygonwinkelfehler als $\pm 10''$ zu erzielen. Mit 4,5 Winkeln würde man rund 21" (Bremen Altstadt ergibt ca. 21,''5), mit 6 Winkeln rund 24,''5 (Hannover 23,''2) erhalten.

22. **Doppelanschluss**. Da die Fehler der Polygonzüge durch den Anschlusszwang schnell wachsen, so liegt es nahe, auf Mittel zu sinnen, diesen Fehler herunterzusetzen. Verfasser wendet schon seit Jahren das einfache Mittel des Doppelanschlusses an, d. h. auf jedem Anfangs- und Endpunkt eines Polygonzuges werden zwei Anschlusswinkel beobachtet. In der Regel werden zwei verschiedene Festpunkte beobachtet; sonst müsste man den Winkel doppelt so oft messen, als die anderen. — Wir wollen nun auch für diesen Fall die Fehlerfortpflanzung untersuchen. Es sei wie bisher die mittlere Seitenlänge 80 m, der mittlere Fehler eines Winkels auf der Station 10,''5, mit Rücksicht auf die Exzentrizitätsfehler beider resp. eines Zielpunkts und des Winkelzentrums

$$\sqrt{10,5^2 + 5^2} = \sqrt{135} = 11,''6 \text{ resp. } \sqrt{10,5 + \frac{5^2}{2}} = \sqrt{123} = 11,''1;$$

der mittlere Fehler der trigonometrischen Anschlussrichtungen $\pm 6''$.

Klasse I. M. F. der Anschlussrichtungen $\pm 6''$, des Winkels selbst $= \sqrt{123}$, zusammen $\sqrt{123 + 36} = \sqrt{159}$. Bei Anschluss an zwei Punkte geht dieser Fehler herunter auf $\sqrt{80}$. (Im Falle doppelter Winkelmessung zunächst auf $\sqrt{\frac{10{,}5^2}{2} + \frac{5^2}{2}} = \sqrt{68}$, sodann wegen Anschlusses an nur einen Punkt auf $\sqrt{68 + 36} = \sqrt{104} = \pm 10''{,}2$. Dieser Betrag ist etwas höher als $\sqrt{80} = 9''$; da der Fall aber nur selten vorkommen kann, beschränken wir uns auf den Anschluss an zwei Punkte). Wir erhalten also

für 4 Winkel Abschlussfehler $\sqrt{2 \cdot 80 + 2 \cdot 135} = \sqrt{430} = 20''{,}7$
(Azimutf. $\pm 10''{,}4$)

„ 5 „ „ $\sqrt{2 \cdot 80 + 3 \cdot 135} = \sqrt{565} = 23{,}8$
(Azimutf. $\pm 11{,}5$)

„ 4,5 „ „ $\pm 22''{,}3$; m. Azimutfehler $\pm 11''{,}0$.

Klasse III. M. F. des doppelten Anschlusswinkels

$$\sqrt{\frac{135 + 11^2}{2}} = \sqrt{127{,}5}.$$

Abschlussfehler für 4 Winkel $\sqrt{255 + 2 \cdot 135} = \sqrt{525} = 22''{,}9$
(Azimutf. $= 11{,}45$)

„ „ 5 „ $\sqrt{255 + 3 \cdot 135} = \sqrt{660} = 25''{,}7$
(Azimutf. $= 12{,}6$)

„ „ 4,5 „ $= 24''{,}3$
(Azimutf. $= 12{,}0$)

Klasse V. M. F. des doppelten Anschlusswinkels

$$\sqrt{\frac{135 + 144}{2}} = \sqrt{140}.$$

Abschlussfehler für 4 Winkel $\sqrt{280 + 270} = \sqrt{550} = 23''{,}45$
(Azimutf. $= 11{,}7$)

„ „ 5 „ $\sqrt{280 + 405} = \sqrt{685} = 26''{,}2$
(Azimutf. $= 12{,}9$)

„ „ 4,5 „ $= 24''{,}8$
(Azimutf. $= 12''{,}3$)

Der Azimutfehler bezieht sich auf eine innere Seite.

Somit erhalten wir:

		Abschluss-fehler	Azimutfehler der Innenseite
Klasse I	Einfacher Anschluss	25″,6	12″,6
	Doppelter Anschluss	22″,3	11″,0
Klasse III	Einfacher Anschluss	30″,4	15″,2
	Doppelter Anschluss	24″,3	12″,0
Klasse V	Einfacher Anschluss	32″,6	16″,3
	Doppelter Anschluss	24″,8	12″,3.

Allgemein erhalten wir als Anschlussfehler für n-Winkel:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Klasse I} & \sqrt{160 + (n-2)\cdot 135} \\ \text{„ II} & \sqrt{210 + (n-2)\cdot 135} \\ \text{„ III} & \sqrt{255 + (n-2)\cdot 135} \\ \text{„ V} & \sqrt{280 + (n-2)\cdot 135} \end{array}\right\} \quad (1)$$

Hiermit erhalten wir:

	Klasse I	Klasse II	Klasse III	Klasse V
n = 3	17″	19″	20″	20″
4	21	22	23	23
5	24	25	26	26
6	26	27	28	29
7	29	30	31	31
8	31	32	33	33
9	33	34	35	35
10	35	36	37	37

Setzt man hierfür:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Klasse I} & 12 + 2{,}3\,n \\ \text{„ II} & 13 + 2{,}3\,n \\ \text{„ III} & 14 + 2{,}3\,n \end{array}\right\} \quad (2)$$

so erhalten wir für:

	I	II	III
n = 3	19″	20″	21″
4	21	22	23
5	24	25	26
6	26	27	28
7	28	29	30
8	30	31	32
9	33	34	35
10	35	36	37

Einesteils werden die Abschlussfehler jetzt erheblich geringer, andererseits ist sie Genauigkeit der Anschlusswinkel und diejenige der inneren Winkel fast gleich (9″, 10″2, 11″,3, 11″,8 zu 11″,6), so dass man sie als gleich genau ansehen und behandeln dürfen wird.

III. Ausgleichung der Polygonzüge.

23. **Vorbemerkungen.** Zwei trigonometrische Punkte A und E seien durch einen gebrochenen Linienzug verbunden, dessen einzelne Seiten s_1, s_2, s_3 heissen mögen; die einzelnen Brechpunkte seien P_1, P_2, P_3, sodass $AP_1 = s_1$, $P_1P_2 = s_2$ ist. Von A aus sei ein anderer Punkt B des Netzes sichtbar; dann ist BAP_1 der erste Brechungswinkel β_1, AP_1P_2 der zweite Brechungswinkel β_2 u. s. f. Ist F ein Punkt, welcher von E aus sichtbar ist, und ist der Winkel P_nEF ebenfalls gemessen, so hat man sofort eine Probe für die Winkelsumme, nämlich $[\beta] = (EF) - (BA) \pm n \cdot 180^0$, d. h. die Summe aller Winkel muss gleich der Differenz der gegebenen Azimute sein, abgesehen von einer gewissen Anzahl von 2 rechten Winkeln.

Ist diese Bedingung erfüllt, so bildet man die Azimute α_n der einzelnen Seiten nach dem Schema:

$$\alpha_1 \text{ (Azimut von } s_1) = (BA) + \beta_1 \pm 180^0.$$
$$\alpha_2 \text{ (Azimut von } s_2) = \alpha_1 + \beta_2 \pm 180^0.$$

Da die Koordinaten der Punkte P_n gesucht werden, so hat man weiter zu rechnen

$$y_1 = y_A + s_1 \cdot \sin \alpha_1 ; \; x_1 = x_A + s_1 \cdot \cos \alpha_1.$$
$$y_2 = y_1 + s_2 \cdot \sin \alpha_2 ; \; x_2 = x_1 + s_2 \cdot \cos \alpha_2.$$

Nun sind die beiden weiteren Proben:

$[s \cdot \sin \alpha]$ muss sein gleich $y_E - y_A$.
$[s \cdot \cos \alpha]$ „ „ „ $x_E - x_A$.

Ein Polygonzug, in welchem alle Stücke gemessen sind, hat also drei zu erfüllende Bedingungen.

Für gewöhnlich verteilt man die Winkeldifferenz auf alle Winkel gleichmässig, bildet dann die Azimute und berechnet die Koordinatendifferenzen. Die kleinen Beträge, um welche diese dann noch gegen $(y_E - y_A)$, resp. $(x_E - x_A)$ abweichen, werden auf irgend eine Weise, z. B. proportional den Seiten, verteilt, ohne dass man sich weiter um die Azimute bekümmert. Somit tritt der Fall ein, dass man bei weiterer Rechnung in Zweifel sein kann, welches Azimut gültig ist, das endgültige, wirkliche Azimut $\text{arc tg} \frac{y_n - (y_n - 1)}{x_n - (x_n - 1)}$ oder das Azimut α_n; meistens nimmt man sogar letzteres, wenn etwa noch ein weiterer Zug anzuschliessen ist. Eine Entschuldigung hierfür ist darin zu finden, dass der Zusammenhang zwischen Koordinaten-Änderung und Azimut-Änderung ziemlich kompliziert ist, so dass eine Neuberechnung der Azimute auch nicht viel umständlicher ist.

Eine Änderung des Azimuts α um $\delta\alpha$ ändert gleichzeitig die Ordinaten- und Abscissendifferenz:

$$s \cdot \sin (\alpha + \delta\alpha) = s \cdot \sin \alpha + s \cdot \cos \alpha \, \delta\alpha$$
$$s \cdot \cos (\alpha + \delta\alpha) = s \cdot \cos \alpha - s \cdot \sin \alpha \cdot \delta\alpha.$$

Mit den gebräuchlichen Abkürzungen

$$\Delta y = s \cdot \sin \alpha$$
$$\Delta x = s \cdot \cos \alpha$$

pflegt man diese Beziehungen kurz anzugeben mit

$$\left.\begin{aligned} \delta y &= \Delta x \cdot \delta\alpha \\ \delta x &= -\Delta y \cdot \delta\alpha \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ändert sich aber umgekehrt nur Δy um δy und soll Δx konstant bleiben, so hat man auszugehen von $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, also

$$\operatorname{tg}(\alpha + \delta\alpha) = \frac{\Delta y + \delta y}{\Delta x}$$

$$\operatorname{tg}\alpha + (1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\,\delta\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\delta y}{\Delta x}$$

$$\sec^2\alpha \cdot \delta\alpha = \frac{\delta y}{\Delta x} = \frac{\delta y}{s \cdot \cos a}$$

$$\delta_1\alpha = \frac{\cos\alpha}{s} \cdot \delta y \qquad (2)$$

Ändert sich andererseits Δx um δx, so erhält man aus

$$\operatorname{tg}(\alpha + \delta\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x + \delta x}$$

$$\delta_2\alpha = -\frac{\sin\alpha}{s} \cdot \delta x \quad (3)$$

Hiermit hat man auch die totale Änderung von α für gleichzeitige Änderung von Δy und Δx

$$d\alpha = \delta_1\alpha + \delta_2\alpha = \frac{\cos\alpha}{s} \cdot \delta y - \frac{\sin\alpha}{s} \cdot \delta x \qquad (4)$$

oder auch

$$d\alpha = \frac{\Delta x}{s^2} \cdot \delta y - \frac{\Delta y}{s^2} \cdot \delta x \qquad (4a)$$

Aus der Beziehung

$$s^2 = \Delta^2 y + \Delta^2 x$$

folgt weiter

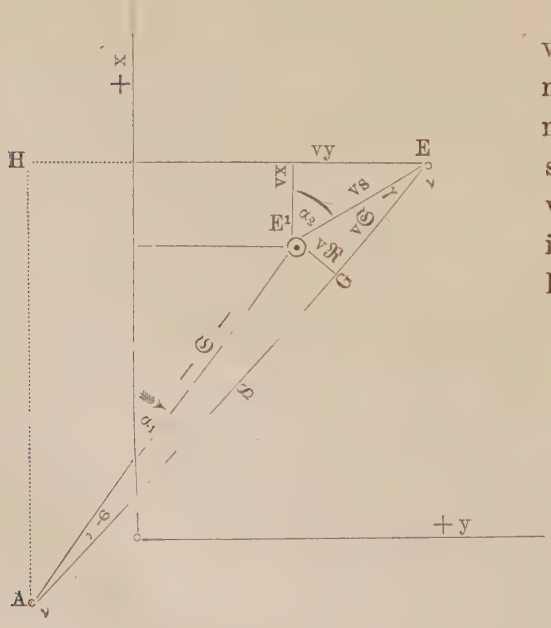
$$\delta_1 s = \frac{\Delta y}{s} \cdot \delta y = \sin\alpha \cdot \delta y \qquad (5)$$

$$\delta_2 s = \frac{\Delta x}{s} \cdot \delta x = \cos\alpha \cdot \delta x \qquad (6)$$

$$ds = \sin\alpha \cdot \delta y + \cos\alpha \cdot \delta x \qquad (7)$$

24. **Der gestreckte, grade Zug.** Liegen die Polygonpunkte P_1, P_2 .. annähernd in der Linie AE, so nennt man den Zug grade oder gestreckt. Wir wollen zunächst annehmen, der Zug wäre völlig grade. Wegen der Fehler der Winkel- und der Seitenmessung wird man nun bei Berechnung des Zuges einen anderen Endpunkt E^1 erhalten, als den gegebenen Endpunkt E. Der falsche Endpunkt E^1 wird nicht in der Linie AE, sondern seitwärts, auch nicht neben E, sondern davor oder zurückliegen, so dass AE^1 nicht gleich AE ist. Der wirkliche Schlussfehler des Zuges ist also EE^1 nach Grösse und nach Richtung.

Bei der Berechnung zeigt sich EE^1 zunächst in den Koordinatenwidersprüchen fy und fx, bezw. in den Verbesserungen vy und vx, nämlich $EE^1 = \sqrt{vy^2 + vx^2}$, während die Richtung (EE^1) durch $\text{arc tg} \frac{vy}{vx}$ angegeben wird. — Anstatt auf das willkürliche Koordinatensystem des trigonometrischen Netzes kann man EE^1 aber auch auf AE selbst projizieren (Fusspunkt G), und nennt man GE^1 den Querfehler, EG den Längenfehler des Zuges.



Bezeichnen wir die vy und vx entsprechenden neuen Verbesserungen E^1G mit $v\mathfrak{R}$ und GE mit $v\mathfrak{E}$, so haben wir zur Umwandlung ein vy und vx in $v\mathfrak{R}$ und $v\mathfrak{E}$ folgende Beziehungen

1. $$\text{tg}\alpha_1 = \frac{[\Delta y]}{[\Delta x]} = \frac{HE}{AH}$$

$$\text{tg}\alpha_2 = \frac{vy}{vx}$$

2. $$\gamma = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$\text{tg}\gamma = \frac{\text{tg}\alpha_2 - \text{tg}\alpha_1}{1 + \text{tg}\alpha_1 \cdot \text{tg}\alpha_2}$$

3. $\sin\gamma = \frac{\mathrm{tg}\gamma}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\gamma}}$; $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\gamma}}$

4. $v\Re = vs \cdot \sin\gamma$; $v\mathfrak{S} = vs \cdot \cos\gamma$.

Wir finden zunächst für $\mathrm{tg}\gamma$ $\frac{[\Delta y]\cdot vx - [\Delta x]\cdot vy}{[\Delta y]\cdot vy + [\Delta x]\cdot vx}$ und dann für $\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\gamma}$ $\frac{\sqrt{[\Delta^1 y]^2 + [\Delta x]^2}\sqrt{vy^2 + vx^2}}{[\Delta y]\cdot vy + [\Delta x]\cdot vx}$, also mit $AE = S$ $\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\gamma} = \frac{S\cdot vs}{[\Delta y]\cdot vy + [\Delta x]\cdot vx}$. Hiermit wird

$$v\Re = \frac{[\Delta y]\cdot vx - [\Delta x]\cdot vy}{S} \qquad v\mathfrak{S} = \frac{[\Delta y]\cdot vy + [\Delta x]\cdot vx}{S} \qquad (1)$$

Die Preussische Vermessungsanweisung hat übrigens diese beiden Werte nicht direkt, sondern an Stelle von $v\Re$ den Winkel $\varphi = \frac{v\Re}{\mathfrak{S}}$, also

$$\varphi = \frac{[\Delta y]\cdot vx - [vx]\cdot vy}{S\cdot\mathfrak{S}} \qquad (2)$$

An Stelle von $v\mathfrak{S}$ hat sie einen Faktor q, nämlich

$$S = \mathfrak{S}\cdot q = \mathfrak{S} + v\mathfrak{S},$$

$$\text{also} \quad q = 1 + \frac{v\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}},$$

und dem entsprechend findet sich der Ausdruck $\frac{v\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}}$ unter der Bezeichnung „$q - 1$“, also

$$q - 1 = \frac{[\Delta y]\cdot vy + [\Delta x]\cdot vx}{S\cdot\mathfrak{S}} \qquad (3)$$

Die Trennung des Querfehlers vom Längenfehler hat beim gestreckten Zuge ihre grosse Berechtigung, insofern als ersterer nur durch Änderung der Winkel, letzterer nur durch Änderung der Seiten weggeschafft werden kann. — Eine Berechnung der Werte φ und $q - 1$ findet übrigens immer statt.

25. **Die Ergebnisse der Bremer Vermessungen.** Es liegt in der Natur der Sache, dass grade Züge fast nie vorkommen; dagegen strebt man, der gestreckten Form möglichst nahe zu kommen. Einen Anhalt zur Beurteilung der Form der Züge

bietet der Vergleich zwischen der graden, direkten Entfernung AE und der Summe aller Seiten — [s] — eines Zuges. — So enthält die Altstadt

71 Züge mit 244 Seiten; die Summe aller AE ist 16740 m,
die Summe aller Seiten ist 17864 m,

das heisst also: ein Zug hat im Durchschnitt 3,44 Seiten; AE ist im Durchschnitt 236 m, [s] = 252, also 6,7 % länger. Eine Seite ist im Mittel 73,3 m. — Die Neustadt hat

45 Züge mit 163 Seiten; [AE] = 13747; [s] = 14745 m,

Durchschnitt: 1 Zug mit 3,62 Seiten; AE = 306; [s] = 328 m, also mehr 7,1 %. Mittlere Seitenlänge 90,6 m.

Im ganzen:

116 Züge mit 407 Seiten; [AE] = 30487; [s] = 32609 m,

Durchschnitt: 1 Zug mit 3,5 Seiten; AE = 263; [s] = 281 m, also mehr rund 7 %. Mittlere Seitenlänge 80 m.

Die Züge kommen also der gestreckten Form sehr nahe; damit haben aber auch die überall berechneten Werte (q—1) nahezu den beim gestreckten Zuge definierten Sinn.

In der Altstadt beträgt das Mittel aller Werte (q—1)
absolut — ohne Rücksicht auf das Vorzeichen: ± 0,000075,
relativ — mit Rücksicht auf das Vorzeichen: + 0,000024.
Der Längenfehler beträgt also auf 236 m ± 17,7 mm,
bezw. + 5,7 mm.

In der Neustadt absolut . . . . . ± 0,000096,
relativ . . . . . + 0,000032.
Längenfehler pro Zug (AE = 306 m) also . ± 29,4 mm,
bezw. + 9,7 mm.

Im ganzen ± 0,000083, bezw. + 0,000027; Längenfehler ± 22 mm bezw. + 7 mm.

Nun beträgt nach Seite 43 der mittlere Fehler einer Polygonseite von 80 m ± 1,93 mm, also der mittlere Fehler eines Zuges von 3,5 Seiten $1{,}93\sqrt{3{,}5} = \pm 3{,}6$ mm.

Da der lineare Schlussfehler aber ± 22 mm beträgt, so muss ein Fehler von $\sqrt{22^2 - 3{,}6^2} = \pm 21{,}7$ mm aus anderen Quellen herrühren (regelmässige, einseitige Fehler).

Die zufälligen Fehler verschwinden also völlig gegen die andern Fehler, so sehr, dass man sie gänzlich vernachlässigen kann.

Als Ursachen dieses verhältnismässig grossen Fehlers sind etwa die Veränderungen der Längenmasswerkzeuge infolge von Temperatur und Feuchtigkeit zu denken. Diese Veränderung geht namentlich bei hölzernen Werkzeugen sehr langsam vor sich, so dass sie bei den Doppelmessungen sich kaum oder gar nicht zeigen kann. — Die gefundenen Fehler sind als „einseitige" durch proportionale Änderung der Seiten zu vernichten.

Da sich der für $(q - 1)$ gefundene Wert streng genommen nur auf grade Züge bezieht, so müssen wir einen Schritt weiter gehen und wollen ganz allgemein nach einem Faktor suchen, welcher den Schlussfehler möglichst beseitigt.

Eine Multiplikation aller Seiten mit $(1 + \lambda)$ oder eine Änderung aller Seiten um $s \cdot \lambda$ ändert die Koordinaten-Unterschiede $[\Delta\mathfrak{y}]$ und $[\Delta\mathfrak{x}]$ um $[\Delta\mathfrak{y}]\,\lambda$ und $[\Delta\mathfrak{x}] \cdot \lambda$. Sind nun $[\Delta\mathfrak{y}]$ und $[\Delta\mathfrak{x}]$ die vorläufigen Unterschiede gegen die endgültigen $[\Delta y]$ und $[\Delta x]$, so ist

$$[\Delta\mathfrak{y}] + vy = [\Delta y]\,;\ [\Delta\mathfrak{x}] + vx = [\Delta x] \quad (1)$$

Würde der Gesamtfehler durch Einführung eines Wertes λ vernichtet werden können, so müsste sein

$$[\Delta\mathfrak{y}] \cdot \lambda = vy\,;\ [\Delta\mathfrak{x}] \cdot \lambda = vx,$$

$$\text{d. h. } \frac{vy}{vx} = \frac{[\Delta\mathfrak{y}]}{[\Delta\mathfrak{x}]} \qquad (2)$$

Ist dies nicht der Fall, was die Regel ist, so kann man nur versuchen, λ so zu bestimmen, dass der Gesamtfehler

möglichst getilgt wird. Da $vs^2 = vy^2 + vx^2$, so wird nach Einführung von λ

$$vs^2 = (vy - [\Delta\mathfrak{y}] \cdot \lambda)^2 + (vx\,[\Delta\mathfrak{x}] \cdot \lambda)^2$$

und vs wird ein Minimum, wenn

$$\frac{\partial \cdot vs}{\partial \lambda} = -vy[\Delta\mathfrak{y}] - vx[\Delta\mathfrak{x}] + [\Delta\mathfrak{y}]^2\lambda + [\Delta\mathfrak{x}]^2 \cdot \lambda = 0$$

wird. Damit wird

$$\lambda = \frac{vy[\Delta\mathfrak{y}] + vx \cdot [\Delta\mathfrak{x}]}{[\Delta\mathfrak{y}]^2 + [\Delta\mathfrak{x}]^2}. \qquad (3)$$

Dieser Ausdruck ist identisch mit dem Seite 77 für $(q-1)$ gefundenen Wert

$$q - 1 = \frac{vy[\Delta y] + vx[\Delta x]}{\mathfrak{S} \cdot S}$$

und stimmt buchstäblich überein mit der Form dieses Ausdrucks in der Anweisung IX (abgesehen davon, dass wir statt fy: vy und statt fx: vx schreiben).

Der Wert $(q - 1)$ hat also eine viel weiter gehende Bedeutung, als man ihm ursprünglich beigelegt hat (vgl. Gauss, Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst. Halle 1876. Seite 165—175). Soweit ein regelmässiger Längenfehler vorhanden ist, wird er durch Anbringung der Korrektionen $s \cdot (q - 1)$ und $[\Delta\mathfrak{y}] \cdot (q - 1)$ resp. $[\Delta\mathfrak{x}] \cdot (q - 1)$ sicher vernichtet, ohne dass hierzu eine gestreckte Form des Zuges Voraussetzung ist.

Nach Anbringung dieser Korrektionen erhält man einen neuen Punkt E^{II}, welcher neben E liegt; vy und vx gehen in neue Werte $v'y$ und $v'x$ über, welche sich umgekehrt wie $[\Delta\mathfrak{y}] : [\Delta\mathfrak{x}]$ verhalten. Der neue Fehler $E^{II}E$ muss beim graden Zuge durch Änderung der Winkel, sonst durch Änderung der Winkel und der Seiten vernichtet werden.

Der Mittelwert aller φ beträgt in der

Altstadt $0{,}000072 = 15''$; $AE = 236$; $E^{II}E = 17$ mm,

Neustadt $0{,}000119 = 24''{,}5$; $AE = 306$; $E^{II}E = 36$ mm,

Im Ganzen $0{,}000090 = 18''{,}5$; $AE = 263$; $E^{II}E = 24$ mm.

26. **Strenge Ausgleichung eines Polygonzuges.** (Beispiel.)

Gegebenes Anschluss-Azimut	18°.00′.40″	
Gemessen in A	244.13.02	
„ P_1	147.45.25	$AP_1 = s_1 =$ 84,888
„ P_2	168.21.19	$P_1P_2 = s_2 =$ 51,222
„ P_3	162.14.06	$P_2P_3 = s_3 =$ 47,068
„ E	228.13.42	$P_3E = s_4 =$ 29,928
zus.	968.48.14	$[s] =$ 213,106
Gegebenes Abschluss-Azimut	68.48.59	
Winkelverbesserung	+ 45″	

Die Koordinaten von A sind 55,180 — 329,885

„ „ „ E „ 218,225 — 220,509

also $[\Delta y] = 163{,}045$; $[\Delta x] = 109{,}376$

Die Koordinatenberechnung ergibt:

α_1	82°.13′.42″	s_1	84,888	$\Delta\eta_1$	84,108	$\Delta\xi_1$ 11,479
α_2	49.59.07	s_2	51,222	$\Delta\eta_2$	39,230	$\Delta\xi_2$ 32,935
α_3	38.20.26	s_3	47,068	$\Delta\eta_3$	29,198	$\Delta\xi_3$ 36,917
α_4	20.34.32	s_4	29,928	$\Delta\eta_4$	10,518	$\Delta\xi_4$ 28,019
(α_5	68.48.14)					
			213,106		163,054	109,350
				Soll	163,045	109,376
				Verbesserung:	— 0,009	+ 0,026

Wäre der Zug frei von Winkelfehlern, so müssten sich die Verbesserungen wie 163 : 109 verhalten; wäre er frei von Längenfehlern, so müssten sich die Verbesserungen wie 109 : 163 verhalten. Beides ist nicht der Fall. Wir bestimmen daher zunächst den einseitigen Längenfehler und finden

$$q - 1 = \frac{-0{,}009 \cdot 163 + 0{,}026 \cdot 109{,}4}{163{,}0^2 + 109{,}4^2} = \frac{1{,}36}{38540} = 0{,}000035.$$

Die Summe aller Seiten wird also grösser um 7,5 mm, die Summe der $\Delta\eta$ um 5,7 mm, die der $\Delta\xi$ um 3,8 mm. Der Zug

ist nun frei von einseitigen Längenfehlern und die Koordinaten-Verbesserungen werden — 14,7 mm und + 22,2 mm, welche sich ziemlich genau wie 109 : 163 verhalten. Der Gesamtfehler war vorher $\sqrt{9^2 + 26^2} = 27{,}5$ mm und ist jetzt $\sqrt{14{,}7^2 + 22{,}2^2} = 26{,}6$ mm. (Der jetzige falsche Endpunkt E^{II} liegt neben E, d. h. senkrecht zu AE, was aus der Proportion $\frac{14{,}7}{22{,}2} = \frac{109}{163}$ folgt). Der jetzige Schlussfehler ist die Folge der Fehler der Winkelmessung, vielleicht auch der Seitenmessung. Die Verbindungslinie des Anfangs- und Endpunkts, AE, hat ein Azimut von 56°, vs ein Azimut 326°. Nun können zur Vernichtung von E^{II}E naturgemäss nur solche Seiten beitragen, deren Azimute erheblich von dem der AE abweichen, also s_1 mit 82° und s_4 mit $20^1/_2{}^0$ Azimut. (Umgekehrt werden die Azimute am meisten geändert werden müssen, welche mit AE parallel laufen).

Da also die Möglichkeit vorliegt, dass eine Änderung von s_1 und s_4 Einfluss auf die Schlussfehler hat, so führen wir Winkeländerungen v_1, v_2 und Seitenänderungen vs_1, vs_2 . . ein. Zunächst ist also

$$(1) \quad v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 45''.$$

Da die Azimute α durch Addition der Winkel gebildet sind, so ändert sich

$$\begin{aligned} \alpha_1 \text{ um } v_1 &= v\alpha_1, \\ \alpha_2 \text{ um } v_1 + v_2 &= v\alpha_2, \\ \alpha_3 \text{ um } v_1 + v_2 + v_3 &= v\alpha_3. \end{aligned}$$

Mithin

$$(s_1 + vs_1)\sin(\alpha_1 + v\alpha_1) + (s_2 + vs_2) \cdot \sin(\alpha_2 + v\alpha_2) + \ldots = [\Delta y],$$

das heisst

$$\left.\begin{array}{l} s_1 \cdot \sin\alpha_1 \quad + s_2 \cdot \sin\alpha_2 \quad + s_3 \ \sin\alpha_3 + \\ + s_1 \cdot \cos\alpha_1 \cdot v\alpha_1 + s_2 \ \cos\alpha_2 \cdot v\alpha_2 + s_3 \cdot \cos\alpha_3 \cdot v\alpha_3 + \\ + vs_1 \cdot \sin\alpha_1 \quad + vs_2 \cdot \sin\alpha_2 \quad + vs_3 \cdot \sin\alpha_3 + \end{array}\right\} = [\Delta y]$$

Setzt man für die einzelnen $v\alpha$ ihre Werte (v_1, v_1+v_2 etc.) ein, so erhält man schliesslich, wenn man beiderseits $[\Delta y]$ abzieht:

$$(2)\quad \begin{matrix} \sin\alpha_1 \cdot vs_1 + s_1 \cdot \cos\alpha_1 \\ \sin\alpha_2 \cdot vs_2 \quad s_2 \cdot \cos\alpha_2 \\ \sin\alpha_3 \cdot vs_3 \quad s_3 \cdot \cos\alpha_3 \\ \sin\alpha_4 \cdot vs_4 \quad s_4 \cdot \cos\alpha_4 \end{matrix} \Big\} v_1 \quad \begin{matrix} + s_2 \cdot \cos\alpha_2 \\ s_3 \cdot \cos\alpha_3 \\ s_4 \cdot \cos\alpha_4 \end{matrix} \Big\} v_2 \quad \begin{matrix} + s_3 \cdot \cos\alpha_3 \\ s_4 \cdot \cos\alpha_4 \end{matrix} \Big\} v_3 + = vy$$

Die dritte Bedingungsgleichung wird entsprechend

$$(3)\quad \begin{matrix} \cos\alpha_1 \cdot vs_1 \\ \cos\alpha_2 \cdot vs_2 \\ \cos\alpha_3 \cdot vs_3 \end{matrix} - \begin{Bmatrix} s_1 \cdot \sin\alpha_1 \\ s_2 \cdot \sin\alpha_2 \\ s_3 \cdot \sin\alpha_3 \end{Bmatrix} v_1 \quad - \begin{Bmatrix} s_2 \cdot \sin\alpha_2 \\ s_3 \cdot \sin\alpha_3 \end{Bmatrix} v^2 - s_3 \cdot \sin\alpha_3 - \ldots = vx.$$

Nun ist aber weiter zu beachten, dass weder die Winkel noch die Seiten gleich genau sind; es ist also nötig, Gewichte einzuführen. Da die Gewichte sich umgekehrt wie die Quadrate der mittleren Fehler verhalten, so bestimmen wir zuerst die letzteren.

Die Anschlussseiten sind 37,4 und 48,6 m. Damit ergibt sich die mittlere Schenkellänge der einzelnen Winkel zu

61 68 49 38,5 39 m

und der mittlere Winkelfehler (unter Berücksichtigung der Exzentrizität) zu

$$\sqrt{153} \quad \sqrt{145} \quad \sqrt{177} \quad \sqrt{218} \quad \sqrt{215}$$

Ferner der mittlere Richtungsfehler der Anschlussseiten (Kl. I) mit $\pm 12{,}7'' = \sqrt{161}$: also mittlerer Winkelfehler zusammen

$$\sqrt{314} \quad \sqrt{145} \quad \sqrt{177} \quad \sqrt{218} \quad \sqrt{376}$$

Somit werden die Gewichte $\frac{1}{314}, \frac{1}{145} \ldots$ also

0,00319 0,00689 0,00565 0,00459 0,00266

oder, da die Gewichte nur Verhältniszahlen sind:

Gewicht $g = 1{,}2 \quad 2{,}6 \quad 2{,}1 \quad 1{,}7 \quad 1{,}0$

Die Seiten haben einen mittleren Fehler von $\sqrt{2 + 0{,}02\,L} + \ldots$

also für 85 51 47 30 m

von $\sqrt{3{,}7} \quad \sqrt{3{,}02} \quad \sqrt{2{,}94} \quad \sqrt{2{,}60}$ mm.

Nun ist aber ein Längen- und ein Winkelfehler nicht direkt vergleichbar. Eher schon der Querfehler $s \cdot m\beta$ und der Längenfehler ms, da sich beide in Längenmass angeben lassen. Setzt man aber $ms = s \cdot m\varsigma$, so lässt sich s eliminieren und man erhält das Gesuchte $\left(\frac{m\varsigma}{m\beta}\right)$. Hiermit hat man sich unter $m\varsigma$ den mittleren Fehler der Längeneinheit zu denken, allerdings nicht im Sinne des Quadratwurzelgesetzes — und es sind die Seitenverbesserungen demnächst $vs_1 = s_1\ v\varsigma_1$, $vs_2 = s_2 \cdot v\varsigma_2$ zu nehmen. — (Wären die mittleren Seitenfehler proportional der Quadratwurzel der Seitenlänge, so hätte man alles direkt auf die Seiteneinheit reduzieren können, — die mittleren Winkelfehler wie die trigonometrischen Funktionen auf $r = 1$ bezogen, die mittleren Seitenfehler als $ms = M \sqrt{s}$ gedacht, wo M der mittlere Fehler der Seiteneinheit ist. Dies hätte die ganze Sache wesentlich vereinfacht; die Annahme trifft aber hier nicht zu.)

Wir haben einem Winkel mit dem m.W.F. $m\beta = \sqrt{376} = \pm 19,''4$ das Gewicht 1 gegeben. Für diesen Winkel beträgt die Querunsicherheit

auf 85 m	$\pm$ 8,0 mm	$= \sqrt{64}$	gegen einen Längenfehler			$\sqrt{3,7}$
51 „	$\pm$ 4,8 „	$= \sqrt{23}$	„	„	„	$\sqrt{3,02}$
47 „	$\pm$ 4,4 „	$= \sqrt{19,5}$	„	„	„	$\sqrt{2,94}$
30 „	$\pm$ 2,8 „	$= \sqrt{7,9}$	„	„	„	$\sqrt{2,6}$

damit werden die Gewichte der einzelnen ς $\frac{64}{3,7}$; $\frac{23}{3,02}$ . .

nämlich 17,3 7,6 6,65 3,05.

Dass die längste, also ungenaueste Seite das grösste Gewicht hat, ist leicht einzusehen, da sie relativ am genauesten ist. Der mittlere Fehler der Einheit beträgt bei ihr $\frac{\sqrt{3,7}}{85} = 0,023$ mm, bei der kürzesten $\frac{\sqrt{2,6}}{30} = 0,054$ mm.

Nunmehr sind die v und v_ς so zu bestimmen, dass

$$[(gv^2) + (g \cdot v_\varsigma^2)] = \text{Min.}$$

ist und die drei Bedingungsgleichungen

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 0{,}218$$
$$109v_1 + 98v_2 + 65v_3 + 28\ v_4 \cdot + 84\ v_{\varsigma_1} + 39v_{\varsigma_2} + 29v_{\varsigma_3} + 10{,}5v_{\varsigma_4} = -14{,}8$$
$$-163v_1 - 79v_2 - 40v_3 - 10{,}5v_4 \cdot + 11{,}5v_{\varsigma_1} + 33v_{\varsigma_2} + 37v_{\varsigma_3} + 28\ v_{\varsigma_4} = 22{,}2$$

erfüllt sind. Man erhält in bekannter Weise zunächst für die Korrelaten $k_1 = 0{,}2564$; $k_2 = -0{,}002545$; $k_3 = +0{,}000912$, sodann

$v_1 = -0{,}1413 = -29{,}2$	$v\alpha_1 = -29{,}2$
$v_2 = -0{,}0250 = -5{,}2$	$v\alpha_2 = -34{,}3$
$v_3 = +0{,}0249 = +5{,}1$	$v\alpha_3 = -29{,}2$
$v_4 = +0{,}1033 = +21{,}3$	$v\alpha_4 = -7{,}9$
$v_5 = +0{,}2564 = +52{,}9$	$v\alpha_5 = +45{,}0$

$v_{\varsigma_1} = -0{,}0118$ mm	$vs_1 = -1{,}0$ mm
$v_{\varsigma_2} = -0{,}0091$ „	$vs_2 = -0{,}5$ „
$v_{\varsigma_3} = -0{,}0061$ „	$vs_3 = -0{,}3$ „
$v_{\varsigma_4} = -0{,}0004$ „	$vs_4 =$ · „

Die endgültigen Koordinaten werden:

A	55,180	— 329,885
P_1	139,289	— 318,394
P_2	178,514	— 285,452
P_3	207,707	— 248,529
E	218,225	— 220,509

Die ganze Berechnung ist mit dem Rechenschieber gemacht.

Sobald man mit Längenfehlern und Winkelfehlern zu tun hat, fällt die Überlegenheit der Längenmessung auf. In nachfolgender Tabelle sind zusammengestellt die mittleren Fehler der gemittelten Polygonseiten nach Seite 43, die mittleren Fehler der Polygonwinkel einschliesslich der Exzentrizität (Seite 62), die Querunsicherheit, das Verhältnis beider ($\sqrt{g}$) und das Gewicht der Längenmessung (g).

Seitenlänge	Winkel-fehler	Längen-fehler	Quer-fehler	Verhältnis $\frac{\sqrt{g}}{g}$	g
20 m	± 22,6	± 1,55 mm	± 2,19 mm	1,41	2
40 „	14,5	1,68 „	2,81 „	1,67	3
60 „	12,5	1,81 „	3,64 „	2,01	4
80 „	11,6	1,93 „	4,50 „	2,33	5,5
100 „	11,2	2,05 „	5,43 „	2,65	7
150 „	10,8	2,35 „	7,88 „	3,35	11
200 „	10,7	2,6 „	10,35 „	4,0	16
300 „	10,6	3,1 „	15,45 „	5,0	25
400 „	10,5	3,6 „	20,40 „	5,7	30
500 „	10,5	4,1 „	25,45 „	6,2	40
750 „	10,5	5,3 „	38,2 „	7,2	50
1000 „	10,5	6,5 „	50,9 „	7,8	60

Aus dieser Zusammenstellung ergibt sich, dass die Längenmessung der Winkelmessung immer überlegen ist und dass das Verhältnis mit zunehmender Länge schnell wächst. Sind die Seiten nicht allzukurz, so kann man nach Vernichtung des konstanten Längenfehlers alle übrigen Fehler den Winkeln zur Last legen.

27. **Vereinfachung der Rechnung.** a. Obgleich der eben berechnete Zug schon ziemlich stark von der gestreckten Form abweicht, sind doch die Seitenverbesserungen fast gleich Null. Es wird daher fast immer zulässig sein, nach Beseitigung des konstanten Längenfehlers den ganzen übrigen Widerspruch durch Änderung der Winkel zu vernichten. Eine Wiederholung der Rechnung in diesem Sinne ergibt:

Winkeländerung:	— 25″	— 10″	+ 1″	+ 20″	+ 59″
statt vorher:	— 29″	— 5″	+ 5″	+ 21″	+ 53″
Azimutänderung:	— 25″	— 35″	— 34″	— 14″	+ 45″
statt vorher:	— 29″	— 34″	— 29″	— 8″	+ 45″

Koordinaten: A 55,180 — 329,885
P_1 139,290 — 318,396
P_2 178,516 — 285,453
P_3 207,708 — 248,530
E 218,225 — 220,509

Die Abweichung in den Koordinaten beträgt 1 bis 2 mm.

b. Die mittleren Fehler der Winkel waren angenommen zu $\sqrt{314}$ $\sqrt{145}$ $\sqrt{177}$ $\sqrt{218}$ $\sqrt{376}$

Nehmen wir statt dessen

$\sqrt{350}$ $\sqrt{175}$ $\sqrt{175}$ $\sqrt{175}$ $\sqrt{350}$

so werden die Gewichte 1 und 2. Man erhält

Winkeländerung: — 25" — 10" + 3" + 18" + 60"
Azimutänderung: — 25" — 35" — 32" — 15" + 45"

Die Koordinaten stimmen mit denen sub a. genau überein.

c. Sorgt man bei der Winkelmessung dafür, dass der erste und letzte Winkel genauer gemessen werden, so kann man die Gewichte ganz fortlassen. Wir haben bereits gezeigt, dass man dies in einfacher Weise durch Doppelanschluss erreichen kann und lassen jetzt ein entsprechendes Beispiel folgen.

28. **Beispiel eines Polygonzuges mit doppeltem Anschluss.** Auf dem Anfangspunkte A sind nach zwei trigonometrischen Punkten, deren Azimute mit 210° 28′ 35″,6 und 211° 00′ 41″,6 gegeben sind, die beiden Winkel gemessen, 105° 45′ 56″ und 105° 13′ 55″, so dass sich das Azimut der ersten Seite s_1 ergibt zu 136° 14′ 31″,6 bezw. 136° 14′ 36″,6. Wir setzen für die beiden Anschlusspunkte jetzt einen fingierten, genau in der Mitte zwischen ihnen liegenden Punkt mit dem Azimut 210° 44′ 39″ und fingieren einen nach diesem Punkt gemessenen Winkel mit 105° 29′ 56″. Von diesem Winkel wissen wir, dass er trotz doppelter Messung wegen der Anschlussfehler nicht wesentlich genauer ist als die inneren

Winkel des Zuges. Am Ende des Zuges verfahren wir mit den beiden Winkeln ebenso. Folgendes ist gemessen, bezw. berechnet:

Trig.		Azimut	Seite	Δy	Δx
Anschlusspunkt	210.44.39	210.44.39			
	+1				
A	105.29.56		+ 69	+ 47	− 50
	+2	136.14.36	255,021	+ 176,372	− 184,198
P_1	178.26.34		+ 143	+ 102	− 101
	+1	134.41.12	531,724	+ 378,036	− 373,924
P_2	203.28.39		+ 112	+ 42	− 104
	+2	158.09.52	416,155	+ 154,786	− 386,298
P_3	175.10.16		+ 105	+ 47	− 94
	+1	153.20.10	390,546	+ 175,260	− 349,014
P_4	175.47.32		+ 93	+ 48	− 80
	+1	149.07.43	347,226	+ 178,166	− 298,031
P_5	191.12.26		+ 148	+ 50	− 140
	+2	160.20.10	552,740	+ 185,998	− 520,506
P_6	223.51.16		+ 139	− 40	− 90
	+1	204.11.28	366,518	− 150,193	− 334,332
E	322.31.52				
Trig.		346.43.21			
Anschlusspunkt	1786.43.10				
			+ 769	+ 296	− 659
Soll	43.21		2859,930	+ 1098,425	− 2446,303
Verbesserung	+ 11"		Soll	+ 1098,771	− 2446,939
				vy + 0,346,	vx − 0,636

Zunächst bestimmt man die konstante Längenverbesserung (q−1), welche sich ergibt zu + 0,000269. (Die verwendeten 5 Meter langen Latten waren reichlich 2 Millimeter zu gross, so dass die Längen eigentlich erst um 2 cm pro 100 m hätten geändert werden müssen.) Ändert man jetzt alle Seiten und Koordinatendifferenzen 269 mm pro km, so erhält man die übergeschriebenen Verbesserungen und es bleibt noch zu verbessern

$$[\Delta y] \text{ um } 346 - 296 = + 50 \text{ mm}$$

$$[\Delta x] \text{ „ } - 636 + 659 = + 23 \text{ „}$$

Hier ist zunächst einzuschalten, dass vor Berechnung der Koordinaten-Differenzen der Widerspruch in der Winkelsumme auf die Winkel gleichmässig verteilt ist. Dies ist das allgemein übliche Verfahren, und es ist bekannt, dass man bei weiterer Behandlung nach der Methode der kleinsten Quadrate schliesslich auch so auf die richtigen Resultate kommt, und dies auf wesentlich bequemere Weise.

Vergl. hierzu Jordan I 1895 § 45 Seite 130, desgl. II. 1897 § 102 Seite 407.

Dieser Rechnungsgang ist aber nur richtig, wenn alle Unbekannten gleiches Gewicht haben, ist also nach unserer Darstellung auf Polygonzüge nur anwendbar, sofern doppelter Anschluss gemessen ist, bei einfachem Anschlusse aber nicht. Jordan behandelt den Fall ohne Gewichte, also mit gleichen Gewichten; ob ihm obige Einschränkung entgangen ist, ist mir nicht bekannt, jedenfalls fehlt ein Hinweis. Vergl. übrigens weiter unten Seite 94—96.

Die noch übrigen Fehler sind durch Änderung der Winkel und der Seiten zu tilgen. Nun hat das Azimut AE den Wert 156°, die beiden ersten Seiten weichen also nur um 20° ab, die andern vier haben fast genau diese Richtung und nur die letzte Seite weicht um ca. 48° ab. Es kann also auch nur eine Änderung dieser Seite noch irgendwelchen Zweck haben.

Da die Seiten im Mittel 400 m lang sind, so sind die Winkel von Exzentrizitätsfehlern frei; der mittlere Fehler kann nach obigen Ermittelungen zu $\pm 10''{,}5$ angenommen werden ($= 0{,}00005$ für $r = 1$). Die Querunsicherheit des einen Endpunkts einer 400 m langen Seite wird also $\pm$ 20 mm. Dagegen beträgt der mittlere Fehler der Länge nur $\pm$ 3,6 mm, das Gewicht einer Seite würde also $\frac{400}{13} =$ rund 30 werden.

Eine nochmalige Einführung der Seiten ist hier also erst recht zwecklos.

Die Rechnung selbst lässt sich bequem mit dem Rechenschieber machen, wenn man die Koordinatendifferenzen durch 1000 dividiert, die Absolutglieder aber mit 1000 multipliziert. Man erhält dann die Winkelverbesserungen in der sehr bequemen Einheit 0,000001 r (4,85 Einheiten sind gleich einer Sekunde).

Die Bedingungsgleichungen werden, wenn wir uns die eigentliche Winkelverbesserung v_n in $\delta + u_n$ zerlegt denken:

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	
1	1	1	1	1	1	1	1	= 0
— 2,45	— 2,26	— 1,89	— 1,50	— 1,15	— 0,85	— 0,33	.	= 50
— 1,10	— 0,92	— 0,54	— 0,39	— 0,21	— 0,04	+ 0,15	.	= 23

Die Normalgleichungen werden:

$$8{,}00\,k_1 - 10{,}43\,k_2 - 3{,}05\,k_3 = 0 \qquad k_1 = 13{,}23$$
$$19{,}08\,\text{„} + 6{,}59\,\text{„} = 50 \qquad k_2 = 11{,}76$$
$$2{,}56\,\text{„} = 23 \qquad k_3 = 5{,}53$$

Hieraus ergeben sich die Verbesserungen der

Winkel: — 9,5 — 8,3 — 6,0 — 2,2 + 0,9 + 3,4 + 8,5 + 13,2

Azimute: — 9,5 — 17,8 — 23 8 — 26,0 — 25,1 — 21,7 — 13,2 ± 0,0

In Sekunden ausgedrückt, wird die Änderung der

Azimute: — 2,″0 — 3,″7 — 4,″9 — 5,″4 — 5,″2 — 4,″5 — 2,″7 ± 0,″0

Winkel: — 2,″0 — 1,″7 — 1,″2 — 0,″5 + 0,″2 + 0,″7 + 1,″8 + 2,″7

Die Koordinatendifferenzen ändern sich um

— 9,5 · — 0,184 = + 2 mm; — 9,5 · — 0,176 = + 2 mm

— 17,8 · — 0,373 = + 7 mm; — 17,8 · — 0,378 = + 7 mm

— 23,8 · — 0,386 = + 9 mm; — 23,8 · — 0,155 = + 4 mm etc.

die Ordinaten um 2 7 9 9 8 11 4 mm,

die Abscissen um 2 7 4 4 4 +4 —2 mm,

zusammen bezw. 50 und 23 mm.

Da die Winkel zuerst um $\frac{11}{8} = 1''{,}4$ geändert sind, so sind die wahren Verbesserungen v:

δ	u	v	v^2
1,4	— 2,0	= — 0,6	0,36
1,4	— 1,7	= — 0,3	0,09
1,4	— 1,2	= + 0,2	0,04
1,4	— 0,5	= + 0,9	0,81
1,4	+ 0,2	= + 1,6	2,56
1,4	+ 0,7	= + 2,1	4,41
1,4	+ 1,8	= + 3,2	10,24
1,4	+ 2,7	= + 4,1	16,81
			35,32

$$m^2 = \frac{35{,}32}{3} = 11''{,}77;\ m = \pm 3''{,}44.$$

(Die ursprüngliche Annahme war $\pm 10''{,}5$.)

Es handelt sich bei diesem Zuge um eine Versuchsmessung insofern, als der Zug zehnmal so lang, die einzelnen Seiten fünfmal so lang sind als die entsprechenden Züge und Seiten in der Stadt. Übrigens sind die eben berechneten Grössen nicht benutzt worden, sondern der Zug ist in drei Teile zerlegt worden, von denen jeder am Anfang und am Ende an einen trigonometrischen Punkt angeschlossen ist. Die Ergebnisse sind:

	I.		II.	
A		— 143,573	— 1137,893	
P_1	+ 32,848	— 1322,139	32,859	— 1322,137
P_2	410,993	— 1696,157	410,989	— 1696,166
P_3	565,830	— 2082,555	565,802	— 2082,560
P_4	741,146	— 2431,659	741,102	— 2431,657
P_5	919,368	— 2729,766	919,324	— 2729,759
P_6	1105,427	— 3250,408	1105,402	— 3250,410
E		+ 955,198	— 3584,832	

Die Abweichung steigt in den y bis 44 mm, bei den x ist sie innerhalb eines Zentimeters. Bei einem Azimut von

156° hat der Zug fast die Richtung der X-Axe; die Abscissen sind also hauptsächlich von der Längenmessung, die Ordinaten hauptsächlich von der Winkelmessung abhängig und die Längenmessung ist nach Vernichtung des konstanten Fehlers auch hier der Winkelmessung weit überlegen.

Ist L die Gesamtlänge eines Zuges, so ist nach Jordan II, 1897, Seite 405, die Querunsicherheit annähernd proportional $L^{3/2}$. Beträgt also in einem Zuge von 3 km Länge die Querunsicherheit in der Mitte 5 cm, so kann man sie schätzen:

für	2,5	km	in	der	Mitte	± 3,8	cm
„	2,0	„	„	„	„	± 2,7	„
„	1,5	„	„	„	„	± 1,8	„
„	1,0	„	„	„	„	± 1,0	„

Danach sollte man keinen Zug länger als 1,5 km nehmen. Kann man aber zwei Züge von drei Kilometern Länge so vereinigen, dass sie sich in der Mitte rechtwinklig schneiden, so würde man den gemeinsamen Schnittpunkt, den „Knotenpunkt", aus der Längenmessung so genau bestimmen können, dass die Querunsicherheit von 5 auf 1 cm herunter geht.

29. **Grader, gleichseitiger Zug.** Zerlegt man beim graden Zuge den Gesamtfehler in zwei Komponenten, in der Zugrichtung und quer zur Zugrichtung, so lässt sich der eine Fehler nur durch Änderung der Seiten, der andere nur durch Änderung der Winkel fortschaffen. Während wir bisher mit der Möglichkeit zu rechnen hatten, dass nach Beseitigung des konstanten Längenfehlers der übrig bleibende Fehler eine Folge der Seitenfehler sein könnte, tritt hier jetzt eine völlige

Trennung ein. Handelt es sich um einen genau graden Zug, so wird eine Bedingungsgleichung (die zweite oder dritte) überflüssig, da dann die fehlende von selbst miterfüllt wird. — Man kann sich diese Erleichterung auch bei solchen Zügen zunutze machen, welche annähernd grade sind. Hätte man bei dem Zuge in § 28 nur die ersten beiden Bedingungen erfüllt, so hätte man zwei Normalgleichungen erhalten:

$$8{,}00\,k_1 - 10{,}43\,k_2 = 0 \qquad k_1 = 11{,}9$$
$$19{,}08\,k_2 = 50 \qquad k_2 = 9{,}12$$

und die Verbesserungen (in 0,000001 r):

Winkel	− 10,4	− 8,7	− 5,3	− 1,8	+ 1,4	+ 4,1	+ 8,9	+ 11,9
Azimute	10,4	− 19,1	− 24,4	− 26,2	− 24,8	− 20,7	− 11,8	− 0,1

(statt 0,0)

bezw. in Sekunden:

Azimute	− 2,1	− 3,9	− 5,0	− 5,4	− 5,1	− 4,3	− 2,4	0
Winkel	− 2,1	− 1,8	− 1,1	− 0,4	+ 0,3	+ 0,8	+ 1,9	+ 2,4

Man kann auch die Seiten selbst in die zweite Bedingungsgleichung einsetzen und hat dann als Absolutglied den linearen Querfehler (für § 28 also $\sqrt{50^2 + 23^2} = 55$ mm).

Noch erheblich einfacher gestaltet sich alles beim gleichseitigen graden Zug, der auch in der bisherigen Literatur fast ausschliesslich behandelt ist. Unter Verweisung hierauf, besonders wieder auf Jordan, sollen hier nur einige Ergänzungen gegeben werden. Wir betrachten zunächst den sehr wichtigen Fall der verschiedenen Genauigkeit der Winkel.

Als Beispiel wählen wir zunächst einen Zug von 5 Winkeln und 4 Seiten.

a. Ist der Längenfehler beseitigt, so bestehen folgende beiden Bedingungsgleichungen:

1. $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = \Psi$
2. $4\,s \cdot v_1 + 3\,s \cdot v_2 + 2\,s\ v_3 + s \cdot v_4 = 4\,s \cdot \Phi.$

Hier soll Φ den Winkel bedeuten: $\frac{\text{Querfehler}}{[s]}$.

Wegen der Gleichseitigkeit geht die Bedingungsgleichung 2. über in:

$$4\,v_1 + 3\,v_2 + 2\,v_3 + v_4 = 4\,\Phi$$

Dies ergibt die Normalgleichungen:

$$5\,k_1 + 10\,k_2 = \Psi \qquad k_1 = -0{,}8\,\Phi + 0{,}6\,\Psi$$
$$10\,k_1 + 30\,k_2 = 4\,\Phi \qquad k_2 = +0{,}4\,\Phi - 0{,}2\,\Psi$$

Hieraus ergeben sich folgende Werte für die (v):

$$\begin{aligned} v_1 &= 0{,}8\,\Phi - 0{,}2\,\Psi \\ v_2 &= 0{,}4\,\Phi \quad . \\ v_3 &= \quad . \quad + 0{,}2\,\Psi \\ v_4 &= -0{,}4\,\Phi + 0{,}4\,\Psi \\ v_5 &= -0{,}8\,\Phi + 0{,}6\,\Psi \\ [v] &= \qquad\qquad \Psi \end{aligned}$$

b. Hier hatten alle (v) gleiches Gewicht. Wir wollen jetzt annehmen, dass dem ersten und letzten Winkel nur das Gewicht $^1/_2$ zukommt. Die Bedingungsgleichungen bleiben zwar dieselben, die Normalgleichungen werden aber jetzt

$$\left(\left[\frac{aa}{g}\right] \left[\frac{ab}{g}\right] \text{ etc.}\right)$$

$$7\,k_1 + 14\,k_2 = \Psi \qquad k_1 = \frac{-28\,\Phi + 23\,\Psi}{63}$$

$$14\,k_1 + 46\,k_2 = 4\,\Phi \qquad k_2 \cdot \frac{+14\,\Phi - 7\,\Psi}{63}$$

Die v_n werden $\frac{a_n}{g_n} \cdot k_1 + \frac{b_n}{g_n} \cdot k_2$, nämlich

$$\begin{aligned} v_1 &= {}^8/_9\,\Phi - {}^{10}/_{63}\,\Psi \\ v_2 &= {}^2/_9\,\Phi + {}^2/_{63}\,\Psi \\ v_3 &= \quad . \quad + {}^9/_{63}\,\Psi \\ v_4 &= -{}^2/_9\,\Phi + {}^{16}/_{63}\,\Psi \\ v_5 &= -{}^8/_9\,\Phi + {}^{46}/_{63}\,\Psi \\ [v] &= \qquad\qquad \Psi \end{aligned}$$

c. In der Regel verbessert man die Winkel von vornherein um

$$\delta = {}^1/_5\,\Psi$$

und bestimmt dann nur noch den Rest

$$u_n = v_n - \delta$$

durch Ausgleichung. Die erste Bedingungsgleichung geht jetzt über in

$$[u] = 0,$$

die zweite in

$$4\left(u_1 + \frac{\Psi}{5}\right) + 3\left(u_2 + \frac{\Psi}{5}\right) + 2\left(u_3 + \frac{\Psi}{5}\right) + \left(u_4 + \frac{\Psi}{5}\right) = 4\,\Phi.$$

$$4\,u_1 + 3\,u_2 + 2\,u_3 + u_4 = 4\,\Phi - 2\,\Psi.$$

Setzt man $4\,\Phi - 2\,\Psi = 4\,\varphi$, so wird

$$\varphi = \Phi - {}^1/_2\,\Psi.$$

Aus den Bedingungsgleichungen

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 0$$
$$4\,u_1 + 3\,u_2 + 2\,u_3 + u_4 = 4\,\varphi$$

folgen die Normalgleichungen

$$5\,k_1 + 10\,k_2 = 0 \qquad k_1 = -0{,}8\,\varphi$$
$$10\,k_1 + 30\,k_2 = 4\,\varphi \qquad k_2 = +0{,}4\,\varphi$$

und die Verbesserungen

$$u_1 = \quad 0{,}8\,\varphi = \quad 0{,}8\,\Phi - 0{,}4\,\Psi$$
$$u_2 = \quad 0{,}4\,\varphi = \quad 0{,}4\,\Phi - 0{,}2\,\Psi$$
$$u_3 = \quad . \quad = \quad . \quad .$$
$$u_4 = -0{,}4\,\varphi = -0{,}4\,\Phi + 0{,}2\,\Psi$$
$$u_5 = -0{,}8\,\varphi = -0{,}8\,\Phi + 0{,}4\,\Psi$$
$$[u] = \quad 0 \quad = \quad 0$$

Zählt man zu diesen (u) den gekürzten Betrag $\delta = \frac{\Psi}{5}$ wieder hinzu, so erhält man die bei a. gefundenen Werte der (v).

d. Hier waren gleiche Gewichte vorausgesetzt. Ändert man im Falle ungleicher Gewichte, wie unter b., die Winkel ebenfalls um $\delta = \frac{\Psi}{5}$, so erhält man im Falle b. folgende Werte u:

$$u_1 = {}^8/_9\,\varphi = {}^8/_9\,\Phi - {}^4/_9\,\Psi$$
$$u_2 = {}^2/_9\,\varphi = {}^2/_9\,\Phi - {}^1/_9\,\Psi$$
$$u_3 = \quad . \quad = \quad 0$$

$$u_4 = -\tfrac{2}{9}\varphi = -\tfrac{2}{9}\Phi + \tfrac{1}{9}\Psi$$
$$u_5 = -\tfrac{8}{9}\varphi = -\tfrac{8}{9}\Phi + \tfrac{4}{9}\Psi$$

Addiert man zu diesen (u) $\frac{1}{5}\Psi$, so erhält man nicht die richtigen (v), sondern

$$\left\{\begin{array}{ll} v_1 = & \tfrac{8}{9}\Phi - \tfrac{11}{45}\Psi \\ v_2 = & \tfrac{2}{9}\Phi + \tfrac{4}{45}\Psi \\ v_3 = & + \tfrac{9}{45}\Psi \\ v_4 = & -\tfrac{2}{9}\Phi + \tfrac{14}{45}\Psi \\ v_5 = & -\tfrac{8}{9}\Phi + \tfrac{29}{45}\Psi \end{array}\right\} \quad ?$$

Dies liegt daran, dass schon bei den (ö) auf die Gewichte Rücksicht genommen werden muss. Setzt man nämlich

v_1 und v_5 wegen des halben Gewichts gleich $u + \frac{2}{7}\Psi$

v_2, v_3, v_4 dagegen gleich $u + \frac{1}{7}\Psi$,

so ändert sich Φ um $\frac{8+3+2+1}{7}\Psi = 2\Psi$, wie vorher; es bleiben auch die (u) dieselben, aber die (v) werden:

$$\begin{array}{lll} v_1 = & \tfrac{8}{9}\Phi - \tfrac{1}{9}\Psi + \tfrac{2}{7}\Psi = & \tfrac{8}{9}\Phi - \tfrac{10}{63}\Psi \\ v_2 = & \tfrac{2}{9}\Phi - \tfrac{1}{9}\Psi + \tfrac{1}{7}\Psi = & \tfrac{2}{9}\Phi + \tfrac{2}{63}\Psi \\ v_3 = & + \tfrac{1}{7}\Psi = & + \tfrac{9}{63}\Psi \\ v_4 = & -\tfrac{2}{9}\Phi + \tfrac{1}{9}\Psi + \tfrac{1}{7}\Psi = & -\tfrac{2}{9}\Phi + \tfrac{16}{63}\Psi \\ v_5 = & -\tfrac{8}{9}\Phi + \tfrac{1}{9}\Psi + \tfrac{2}{7}\Psi = & -\tfrac{8}{9}\Phi + \tfrac{46}{63}\Psi \end{array}$$

wie es sein soll.

e. Die Ausführungen bei Jordan über diesen Gegenstand gelten also nur für gleiche Gewichte. Beim gleichseitigen Zuge kann man sich noch leicht durch das angedeutete Verfahren helfen; in allen anderen Fällen muss man aber auf die strenge Ausgleichung zurückgreifen oder die Messungen so einrichten, dass die Gewichte gleich sind. Übrigens kann man sich leicht überzeugen, dass sich $m \cdot \Phi$ immer um $\frac{m}{2}\Psi$ ändert, wenn m die Anzahl der Seiten ist.

Zum Beispiel heisst für $m = 7$ bei gleichen Gewichten die zweite Bedingungsgleichung:

$$7\,v_1 + 6\,v_2 + 5\,v_3 + 4\,v_4 + 3\,v_5 + 2\,v_6 + v_7 = 7\,\Phi$$

oder

$$\left\{\begin{array}{l} 7\,u_1 + 6\,u_2 + 5\,u_3 + 4\,u_4 + 3\,u_5 + 2\,u_6 + u_7 \\ + \frac{7}{8}\Psi + \frac{6}{8}\Psi + \frac{5}{8}\Psi + \frac{4}{8}\Psi + \frac{3}{8}\Psi + \frac{2}{8}\Psi + \frac{1}{8}\Psi \end{array}\right\} = 7\,\Phi$$

d. h. $7\,u_1 + 6\,u_2 + 5\,u_3 + 4\,u_4 + 3\,u_5 + 2\,u_6 + u_7 = 7\,\Phi - 3^1/_2\,\Psi$.

Bei ungleichen Gewichten ($^1/_2$ und 1):

$$\left\{\begin{array}{l} 7\,u_1 + 6\,u_2 + 5\,u_3 + 4\,u_4 + 3\,u_5 + 2\,u_6 + u_7 \\ + \frac{14}{10}\Psi + \frac{6}{10}\Psi + \frac{5}{10}\Psi + \frac{4}{10}\Psi + \frac{3}{10}\Psi + \frac{2}{10}\Psi + \frac{1}{10}\Psi \end{array}\right\} = 7\,\Phi$$

d. h. $7\,u_1 + 6\,u_2 + 5\,u_3 + 4\,u_4 + 3\,u_5 + 2\,u_6 + u_7 = 7\,\Phi - 3^1/_2\,\Psi$.

Setzt man $7\,\Phi - 3^1/_2\,\Psi = 7\,\varphi$

so hat man allgemein und unabhängig von der Seitenzahl m

$$\varphi = \Phi - {}^1/_2\Psi$$
$$\Phi = \varphi + {}^1/_2\Psi.$$

Die Allgemeingültigkeit der beiden letzteren Ausdrücke ist leicht durch den Schluss von n auf (n + 1) zu erweisen.

f. Bei gleichen Gewichten kann man für die Teilverbesserungen u allgemeine Formeln aufstellen (vergl. bei Jordan a. a. O.). Anzahl der Seiten m.

Bedingungsgleichungen:

$$\left\{\begin{array}{llllll} u_1 + & u_2 + & u_3 + & u_4 \ldots + u_{m+1} = 0 \\ m \cdot u_1 + (m-1)\,u_2 + (m-2)\,u_3 + (m-3)\,u_4 \ldots & 0 & = m \cdot \varphi \end{array}\right.$$

Normalgleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} (m+1)k_1 + \frac{m\cdot(m+1)}{2}k_2 = 0 \\ \frac{m\cdot(m+1)}{2}\cdot k_1 + \left(\frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{6}\right)k_2 = m\varphi \end{array}\right.$$

$$k_1 = -\frac{6\,m}{(m+1)(m+2)}\cdot\varphi \qquad k_2 = +\frac{12\,m}{(m+1)(m+2)}\cdot\varphi$$

Hieraus ergeben sich die u:

(1)
$$\frac{m}{(m+1)(m+2)} \cdot 6\varphi;\ \frac{m-2}{(m+1)(m+2)} \cdot 6\varphi;\ \frac{m-4}{(m+1)(m+2)} \cdot 6\varphi$$
etc.

Durch Addition der u findet man die Verbesserungen der Azimute:

(2)
$$\frac{m}{(m+1)(m+2)} \cdot 6\varphi;\ \frac{2m-2}{(m+1)(m+2)} \cdot 6\varphi;\ \frac{3m-6}{(m+1)(m+2)} \cdot 6\varphi$$

Mit Einführung der Winkelzahl n erhält man statt (1):

(3)
$$\frac{n-1}{n\cdot(n+1)} \cdot 6\varphi;\ \frac{n-3}{n\cdot(n+1)} \cdot 6\varphi;\ \frac{n-5}{n\cdot(n+1)} \cdot 6\varphi \text{ etc.}$$

Zum Unterschied gegen die langen Entwickelungen bei Jordan (S. 408 bis 411) sind diese kurzen streng richtig.

An sich haben diese Formeln wenig oder gar keinen Wert. Wenn man auch, wie wir gesehen haben, einen nur annähernd gestreckten Zug wie einen graden wird behandeln dürfen, so ist es doch sehr fraglich, wie lange man einen Zug als gleichseitig ansehen darf. Wegen der mittleren Fehler mit ihrem konstanten Bestandteil $M^2 = 2 + 0{,}02\,L + \ldots$ braucht man die Grenzen freilich nicht zu eng zu ziehen.

Bei dem Zuge in § 28 betragen die mittleren Fehler 2,9 bis 4,4 mm, d. h. 3 oder 4 mm, während die Seiten zwischen den Grenzen 250 und 550 m liegen. - Zunächst handelt es sich hier um den Wert φ, den wir am einfachsten aus $\sqrt{\frac{vy^2 + vx^2}{AE}}$ erhalten, nämlich $\frac{0.055}{2680} = -0{,}000020.5 = -4{,}''23$. (Das Vorzeichen ist bereits bekannt.) Mit $m = 7$ oder $n = 8$ erhalten wir die Änderungen:

(Winkel)	$\frac{7}{12}\varphi$	$\frac{5}{12}\varphi$	$\frac{3}{12}\varphi$	$\frac{1}{12}\varphi$	$-\frac{1}{12}\varphi$	$-\frac{3}{12}\varphi$	$-\frac{5}{12}\varphi$	$-\frac{7}{12}\varphi$
(Azimute)	$\frac{7}{12}\varphi$	$\frac{12}{12}\varphi$	$\frac{15}{12}\varphi$	$\frac{16}{12}\varphi$	$\frac{15}{12}\varphi$	$\frac{12}{12}\varphi$	$\frac{7}{12}\varphi$	0

In Sekunden:

Winkel	−2″,5	−1″,8	−1″,1	−0″,4	+0,4	+1″,1	+1″,8	+2″,5
Azimute	−2″,5	−4″,2	−5″,3	−5,6	−5,3	−4,2	−2,5	0

Nach der strengen Ausgleichung (Seite 90):

−2″,0	−3″,7	−4″,9	−5″,4	−5″,2	−4″,5	−2″,7	0

Das sind, praktisch genommen, überhaupt keine Differenzen; eine andere Sache ist aber die, ob nicht noch kleine Fehler und Widersprüche in den Koordinaten bleiben werden, deren Vernichtung eine abermalige Rechnung verlangt. Dagegen wird man ohne Besinnen einen Zug als grade und ungleichseitig rechnen dürfen, sobald die übrig bleibenden Fehler — nach Beseitigung des Längenfehlers — sich umgekehrt verhalten wie die Koordinatendifferenzen $[\Delta\mathfrak{y}]$ und $[\Delta\mathfrak{x}]$.

IV. Bogenschnitt gemessener Längen.

30. **Erklärung.** (Vgl. Pr. Vermess.-Anweisung IX, 1881.) Von einer Reihe fester Punkte, deren Koordinaten gegeben sind, ist nach einem in der Mitte liegenden zu bestimmenden Punkte gemessen (also reine Längenmessung). Es handelt sich um die wahrscheinlichsten Koordinaten des Neupunktes.

Wir denken uns für den gesuchten Punkt Näherungskoordinaten berechnet, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$; die wahrscheinlichsten Koordinaten seien $\mathfrak{y} + \delta y$ und $\mathfrak{x} + \delta x$. Ferner sei S_a die wahrscheinlichste (ausgeglichene) Entfernung des Neupunkts von dem gegebenen Punkte A; desgleichen $\mathfrak{S}_a + \delta\mathfrak{S}_a$ und $s_a + vs_a$. Von diesen letzteren beiden sei $\mathfrak{S}_a$ der Näherungswert, s_a die wirklich gemessene Länge. — Zunächst ist also

$$\mathfrak{S}_a + \delta\mathfrak{S}_a = s_a + vs_a$$

$$vs_a = \delta\mathfrak{S}_a + (\mathfrak{S}_a - s_a) = \delta\mathfrak{S}_a + f_a \qquad (1)$$

wo also $f = \mathfrak{S} - s$ ist.

Berechnet man S_a aus den endgültigen Koordinaten, so erhält man

$$S_a^2 = (\mathfrak{y} + \delta y - y_a)^2 + (\mathfrak{x} + \delta x - x_a)^2$$

und mit der Abkürzung $\Delta\mathfrak{y}_a = (\mathfrak{y} - y_a)$; $\Delta\mathfrak{x}_a = (\mathfrak{x} - x_a)$

$$S^2_a = \Delta^2\mathfrak{y}_a + \Delta^2\mathfrak{x}_a + 2\,\Delta\mathfrak{y}_a \cdot \delta y + 2\,\Delta\mathfrak{x}^a \cdot \delta x.$$

Berechnet man S_a dagegen aus der Näherungslänge ($\mathfrak{S}_a$), so erhält man $S_a^2 = \mathfrak{S}_a^2 + 2\,\mathfrak{S}_a \cdot \delta\mathfrak{S}_a$; und da $\mathfrak{S}_a^2 = \Delta^2\mathfrak{y}_a + \Delta^2\mathfrak{x}_a$, so bleibt

$$\delta\mathfrak{S}_a = \frac{\Delta\mathfrak{y}^a}{\mathfrak{S}} \cdot \delta y + \frac{\Delta\mathfrak{x}_a}{\mathfrak{S}} \cdot \delta x \qquad (2)$$

$$= \sin\alpha_1 \cdot \delta y + \cos\alpha_1 \cdot \delta x. \qquad (2a)$$

Aus (1) und (2a) folgt

$$vs_a = \cos\alpha_1 \cdot \delta x + \sin\alpha_1 \cdot \delta y + f_a. \qquad (3)$$

a. Es handelt sich jetzt darum, festzustellen, welcher Art die Fehler sind. Handelte es sich um rein zufällige Fehler von gleichem Gewichte, so hätten wir einfach die Bedingung $[vs^2] = \text{Min.}$

Da die mittleren Fehler der Längen aber von der Länge selbst und von der Art des Terrains abhängen, so ist die Einführung von Gewichten nötig. Wir wählen als Beispiel die in Anweisung IX, Seite 318 u. ff. vorgeführte Punktbestimmung. Der Neupunkt ist von 5 festen Punkten eingemessen; von diesen gehören nach der Terrainschwierigkeit 3 in Klasse I (günstig), 2 in Klasse II (mittel). Soweit die Gewichte von der Länge abhängen, ist für den mittleren Fehler angenommen $m^2 = qL + rL^2$ und $g = \frac{1}{m^2}$. Die Ausgleichung ergibt:

Gemessen (s)	Verbesserung	Ausgeglichen (S)
331,60	+ 0,07	331,67
272,00	− 0,24	271,76
247,10	+ 0,08	247,18
269,50	− 0,18	269,32
416,70	− 0,18	416,52
1536,90		1536,45

Die gegebenen Punkte liegen rund um den Neupunkt herum. Handelte es sich also wirklich nur um „zufällige" Fehler, so müsste $[s] = [S]$ sein. Da dies nicht der Fall ist, so müssen wir auf einen konstanten Fehler schliessen von $\frac{0{,}45}{1537} = 29{,}3$ cm pro km. Ändert man die gemessenen Längen um diesen Betrag, so erhält man

Gemessen (s)	Verbesserung	Ausgeglichen (S)
331,50	+ 0,17	331,67
271,92	— 0,16	271,76
247,03	+ 0,15	247,18
269,42	— 0,10	269,32
416,58	— 0,06	416,52
1536,45		1536,45

Auf die ausgeglichenen Werte hat die Annahme eines konstanten Fehlers keinen oder nur geringen Einfluss, sondern hauptsächlich auf die Verbesserungen und die mittleren Fehler.

Wir entnehmen die Werte der Gewichte der Anw. IX, Seite 319, und haben im ersten Fall:

$\sqrt{g}$	vs	vs $\sqrt{g}$	$g \cdot v_s^2$
2,33	+ 0,07	0,16	0,03
2,63	— 0,24	0,63	0,40
2,27	+ 0,08	0,18	0,03
2,63	— 0,18	0,47	0,22
1,61	— 0,18	0,29	0,08
			0,76

Im zweiten Fall:

2,33	+ 0,17	0,40	0,16
2,63	— 0,16	0,42	0,18
2,27	+ 0,15	0,34	0,12
2,63	— 0,10	0,26	0,07
1,61	— 0,06	0,10	0,01
			0,54

Da der Neupunkt durch zwei Längen bestimmt ist, so sind drei Messungen überschüssig; der mittlere Fehler ist also im ersten Falle $\sqrt{\frac{0,76}{3}} = \pm 0,50$, im zweiten Falle $\sqrt{\frac{0,54}{3}} = \pm 0,425$. Die mittleren Fehler der Koordinaten betragen im ersten Falle $\pm 0,146$ m und $\pm 0,128$ m, im zweiten $\pm 0,124$ m und $\pm 0,109$ m. — Dadurch, dass die mittleren Fehler erheblich kleiner geworden sind, finden wir unsere Annahme eines konstanten Fehlers bestätigt.

b. Wir haben gefunden, dass bei der Längenmessung unserer Stadtvermessung die zufälligen Fehler gegen die konstanten Fehler völlig verschwinden. In diesem Falle muss der konstante Fehler ohne weitere Ausgleichung zu finden sein. Es ist daran zu erinnern, dass zur Bestimmung von δy, δx und der konstanten Längenverbesserung σ $(= q - 1)$ drei Messungen erforderlich sind und jede weitere eine Probe ergibt.

Das folgende Beispiel ist ein fingiertes. Die Näherungs- und endgültigen Koordinaten sind dieselben wie in obigem Beispiel; als „gemessen" sind aber die endgültigen um 2 cm pro 100 m geänderten Seiten angenommen.

Wir erhalten (Gl. (3) Seite 100), wenn wir $vs_a = s_a \cdot \sigma$ setzen:

332	$\sigma =$	$-0,676$	δx	$+0,735$	δy	$+\ 0$ mm
272	$\sigma =$	$-0,907$	δx	$-0,420$	δy	$+\ 298$ „
247	$\sigma =$	$+0,105$	δx	$-0,996$	δy	$+\ 271$ „
269	$\sigma =$	$+0,994$	δx	$+0,112$	δy	$-\ 133$ „
417	$\sigma =$	$+0,186$	δx	$+0,983$	δy	$-\ 183$ „
-491	$\sigma =$		δx	$-1,088$	δy	$-\ 0$ „
-300	$\sigma =$		δx	$+0,464$	δy	$-\ 329$ „
2354	$\sigma =$		δx	$-9,49$	δy	$+\ 2582$ „
271	$\sigma =$		δx	$+0,113$	δy	$-\ 134$ „
2243	$\sigma =$		δx	$+5,29$	δy	$-\ 984$ „
4077	$\sigma =$		$5\,\delta x$	$-4,711$	δy	$+\ 1135$ mm
Mittel I: 815	$\sigma =$		δx	$-0,942$	δy	$+\ 227$ „

191	$\sigma =$	1,552 δy — 329	mm
2845	$\sigma =$	—8,402 δy + 2582	„
762	$\sigma =$	1,201 δy — 134	„
2734	$\sigma =$	6,378 δy — 984	„
123	$\sigma =$	δy — 212	„
— 339	$\sigma =$	δy — 307	„
637	$\sigma =$	δy — 112	„
429	$\sigma =$	δy — 155	„
850	$\sigma =$	4 δy — 786	mm
Mittel II: 212,5	$\sigma =$	δy — 196,5	„
462	$\sigma =$	95	„
976	$\sigma =$	195	„
768	$\sigma =$	152	„
2206	$\sigma =$	442	mm
Mittel III:	$\sigma =$	+ 0,20	„
		(= 0,0002)	

Aus II: $\delta y = +$ 239 mm (Anweisung IX 242 mm).

Aus I: $\delta x = +$ 161 mm (Anweisung IX 164 mm).

Die Rechnung ist mit dem Rechenschieber gemacht.

Ist der zu bestimmende Neupunkt in der Mitte der gegebenen Punkte belegen, so muss man schon aus den Näherungen auf konstante Fehler schliessen können, und das um so mehr, je besser die Näherung ist In dem gewählten Beispiel (Anw. IX, S. 318) finden wir für die Seiten:

Näherung S	Gemessen	Reduziert	statt (S. 101)
331,61	331,60	331,49	331,50
272,01	272,00	271,91	271,92
247,40	247,10	247,02	247,03
269,14	269,50	269,42	269,42
416,25	416,70	416,57	416,58
1536,41	1536,90	1536,41	1536,45
(statt 1536,45)	zu viel 0,49		

Die Näherung ist hier nicht sehr genau, da der Punkt noch um ca. 30 cm verschoben werden muss. Wäre die Näherung bereits auf wenige Zentimeter richtig, so ist auch der konstante Fehler hinreichend genau zu ermitteln.

Tritt an die Stelle der einfachen Seiten ein Polygonzug, so nennt man den zu bestimmenden Neupunkt einen „Knotenpunkt". Wenn, wie bei Stadtvermessungen, die Genauigkeit der Längenmessung überwiegt, so hat man grade hier auf die Ermittelung und Beseitigung des konstanten Längenfehlers besondere Sorgfalt zu verwenden, hat aber dann auch die Gewissheit, sehr genaue Resultate erlangt zu haben.

31. **Einige Schlussbemerkungen.** Als vor dreissig Jahren an die Stelle der bisher üblichen reinen Längenmessung nach und nach die Winkelmessung trat, ist eine gewisse Geringschätzung der Längenmessung eingetreten. Praktiker, welche Gelegenheit hatten, in der Ebene grosse Neumessungen auszuführen, wissen, dass diese Geringschätzung sehr wenig begründet ist. Auch bei Beginn der Stadtvermessungen ist man an diese Arbeit herangetreten mit dem Gefühl der Überlegenheit der Winkelmessung.

Wie wir in vorstehenden Betrachtungen gezeigt haben, liegt alles daran, dass man bei der Längenmessung die scheinbaren und die wirklichen Fehler verwechselt hat. Dabei ist man teilweise zu durchaus verkehrten Schlüssen gekommen. So ist für die Hamburger Vermessung – die man sonst wohl als eine der vernünftigsten im ganzen Deutschen Reiche bezeichnen darf, weil sie frei von allem Formularismus ist – der Grundsatz aufgestellt, dass es keinen Zweck hat, bei Polygonzügen genauere Winkelmessung zu verlangen als Seitenmessung. Dies wäre ganz richtig, wenn die scheinbaren Fehler die wirklichen Fehler wären. In Wirklichkeit wird man durch Winkelmessung nicht die Genauigkeit der Seitenmessung erreichen können. Man könnte daran denken, beste Instrumente zu benutzen und möglichst lange Polygonseiten

anzuwenden. Aber zu welcher Tageszeit ist es in einer Grossstadt möglich, einen Winkel von 500 m Schenkellänge und darüber mehrmals ungestört zu messen? Nach unsern Erfahrungen vor 5 Uhr morgens unter Aufbietung einiger Schutzleute. Die tägliche Ausbeute beträgt also 1 oder 2 Winkel. Und doch erreicht man damit noch mehr, als mit Seiten von 50—100 m und Winkelmessungen ohne Ende.

In neueren Städten, in Vorstädten oder Vororten, also überall, wo grade Strassen die Regel bilden, wird man also — die Winkelmessungen auf das Notwendigste beschränkend — zur früheren Methode der möglichst langen Linien zurückkehren. Das Ausrichten der langen Linien lässt sich unter Anwendung eines genügend starken Fernrohrs fast ohne Fehler machen, jedenfalls innerhalb eines Zentimeters. — Bei fortgesetzter Anwendung dieses Verfahrens erhält man in den Schnittpunkten je zweier solcher Hauptlinien Punkte, deren Koordinaten von vornherein feststehen und eine sehr angenehme und sichere Kontrole für die Richtigkeit der Längenmessungen bieten.

Das trigonometrische Netz, welches wie für jede andere moderne Vermessung, so auch hier die Grundlage bilden muss, lässt sich auf einige wenige Punkte beschränken, auch die sonstigen Berechnungen, welche jetzt dicke Bände füllen, werden sich wesentlich verringern, und die Genauigkeit der Messungsergebnisse kann nur grösser werden.

Andererseits sollte man die geringe Mühe nicht scheuen, Hauptzüge und andere wichtige Züge, welche den Anschluss an das trigonometrische Netz vermitteln und den weiteren Messungen als Grundlage dienen, einer Ausgleichung nach der Methode der kl. Qu. zu unterwerfen. Es wird sich bei ebenen Städten fast stets nur noch um die Verteilung der Winkelfehler handeln, und unter grundsätzlicher Anwendung des Rechenschiebers ist die Arbeit kaum erheblich. Wir haben an den Beispielen gezeigt, dass man einen mässig

gekrümmten Zug noch als gestreckt, einen nur einigermassen gleichseitigen Zug als gleichseitig behandeln darf, ohne einen erheblichen Fehler zu begehen. Man muss dabei immer im Auge behalten, dass man mit Winkeln von $\pm$ 10" m. F. zu tun hat, dass also nur noch die ganzen Sekunden Sinn haben, und dass es ganz gleichgültig ist, ob man die Zehntelsekunden mitführt oder nicht.

Nachwort.

Heft 6 der Zeitschrift für Vermessungswesen vom 15. März 1903 brachte einen Artikel über Stahlbandmessung von Dr. Löschner und einen zweiten von Prof. Dr. Reinhertz. Hierdurch wurde eine von ersterem Herrn im Jahre 1902 erschienene Schrift bekannt „Genauigkeitsuntersuchungen für Längenmessungen". Löschner stellt aus theoretischen Gründen eine Formel auf von der Form $A^2 = p + qL + rL^2$, im übrigen läuft die Arbeit auf ein Verfahren zur Verfeinerung der Stahlbandmessung hinaus. Da der erste Teil dieser Arbeit damals vollständig fertig war, so habe ich weiter keine Notiz von dieser Schrift genommen. Die obige Formel ist mir übrigens seit Jahren bekannt.

Bremen, Juni 1903.

Kopsel.